HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

ERSTER THEIL.

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

ERSTER THEIL.

MIT 45 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.

VORWORT.

Die hier gebotene Darstellung der Grundsätze der Differential- und Integralrechnung ist in erster Linie für die Studirenden an technischen Hochschulen bestimmt. Sie soll denselben eine Erleichterung in der Auffassung der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, aber keinen Ersatz dieser Vorlesung bieten. Es erscheint hier nur mehr der wesentlichste Gedankeninhalt jener Vorlesung in knapper, jedoch sachlich ziemlich vollständiger Form zusammengetragen. Alle näheren Darlegungen und zumal fast alle Ausführungen an Beispielen bleiben der Vorlesung selber vorbehalten.

Die Strenge in den Begriffsbildungen und den Beweisführungen habe ich so weit getrieben, als sie mir zweckmässig und durchführbar schien. Dass vereinzelte Wendungen dem scharfen Urtheil nicht genehm erscheinen werden, weiss ich sehr wohl; doch darf ich zur Entschuldigung auf den Zweck hinweisen, dem der Leitfaden dienen soll.

Das vorliegende erste Heft umfasst den Stoff, welcher in der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung während des ersten Semesters zu bewältigen ist. Die Anordnung ist so gewählt, dass zu Beginn des zweiten Semesters die Vorlesungen über technische Mechanik ungehindert einsetzen können.

Es ist für das Verständniss der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung von grundlegender Wichtigkeit, die zu entwickelnden abstracten Vorstellungen, wo es immer angeht, durch anschauliche Beispiele zu beleben. Die Geometrie der Curven und für die späteren Theile diejenige der Oberflächen bieten hier eine fast unerschöpfliche Fundgrube zweckmässiger Beispiele. Hierbei handelt es sich um Anschauungen, die allen Zuhörern gleichmässig zugänglich sind, und die ohnehin durch die gleichzeitigen geometrischen Vorlesungen befördert werden.

In den mathematischen Vorlesungen der späteren Semester wird man entsprechend die bis dahin entwickelten technischen Vorlesungen für die Auswahl von Beispielen verwerthen. Wollte man dies bereits im ersten Semester bei der Grundlegung der Differentialrechnung versuchen, so würde bei der Zusammensetzung der Zuhörerschaft dadurch aus nahe liegenden Gründen das Verständniss der Vorlesung nicht unerheblich erschwert werden.

Braunschweig, im December 1896.

Robert Fricke.

INHALTSVERZEICHNISS.

I. Capitel.

Einleitung in die Differentialrechnung.

II. Capitel.

Erklärung und Berechnung des Differentialquotienten einer Function $f(x)$.

III. Capitel.

Die Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung einer Function $f(x)$.

IV. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function $f(x)$.

V. Capitel.

Betrachtung des Verlaufes ebener Curven.

VI. Capitel.

Grundlagen der Integralrechnung.

VII. Capitel.

Theorie der unendlichen Reihen.

VIII. Capitel.

Bestimmung der unter den Gestalten $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ... sich darstellenden Functionswerthe.

I. Capitel.

Einleitung in die Differentialrechnung.

1. Veränderliche und unveränderliche Grössen.

Erklärung: *Eine Grösse, welche im Laufe der Zeit verschiedene Werthe annimmt, heisst eine veränderliche oder variabele Grösse oder kurz eine „Variabele"; man bezeichnet solche Variabele in der Regel durch die letzten Buchstaben des Alphabets, wie x, y..., X, Y..., ξ, η... Eine Grösse, welche im Laufe der Zeit ihren Zahlwerth beibehält, heisst eine unveränderliche oder constante Grösse oder kurz eine „Constante"; zur Bezeichnung von Constanten bedient man sich meist der Anfangsbuchstaben des Alphabets a, b..., A, B..., α, β...*

Zur geometrischen Deutung constanter oder variabeler Grössen dient die sogenannte *Zahlenlinie*, d. i. eine Gerade, deren Punkte, wie Fig. 1 andeutet, als Bilder der ganzen Zahlen, sowie der rationalen und irrationalen Brüche gelten.

Fig. 1.

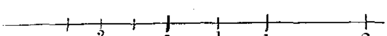
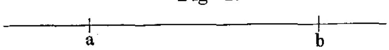


Fig. 2.



Eine Variabele x heisst *unbeschränkt variabel*, falls sie jeden möglichen Werth annehmen kann, falls also ihr Bildpunkt auf der Zahlenlinie an jede Stelle derselben gelangen kann. Wird dagegen die Variabele x niemals kleiner als eine Zahl a und niemals grösser als eine Zahl b, die $> a$ ist, so schreibt man:

$$a \leqq x \leqq b$$

und bezeichnet die in Fig. 2 angedeutete Strecke der Zahlenlinie von a bis b als *das Intervall der Variabelen x.*

2. Begriff der Functionen und geometrische Deutung derselben.

Erklärung: *Sind zwei Variabele x und y derart an einander gebunden, dass bei Veränderungen von x sich die Variabele y „nach einem* *festen Gesetz" mitändert, so heisst y eine „Function" von x. Man sieht das zwischen x und y bestehende Verhältniss so an, dass man x als die „unabhängige" Variabele auffasst, die Function y von x aber als die „abhängige".*

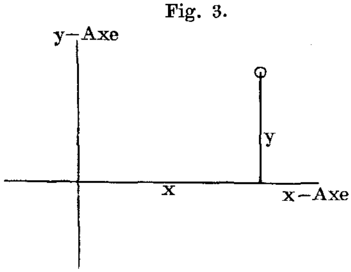
Der Begriff der Function ist der wichtigste in den Anwendungen der höheren Mathematik vorkommende Fundamentalbegriff, und auf die Functionen beziehen sich die Operationen der Differential- und Integralrechnung.

Die für die Rechnung geeignetste Art der *Angabe einer Function* ist diejenige *vermöge einer Gleichung*, wie z. B.:

$$y = 2x + 7 \quad \text{oder} \quad y = ax^2 + bx + c.$$

Will man bei einer auf eine oder mehrere Functionen bezogenen Betrachtung unentschieden lassen, um welche besonderen Functionen es sich handelt, so bedient man sich der *symbolischen Schreibweise* $y = f(x)$ oder $y = g(x)$, oder auch $y = F(x)$, $= \varphi(x)$ und dergl. mehr. Man spricht dann kurz von einer „Function $f(x)$" oder einer „Function $g(x)$" u. s. w. und bezeichnet die unabhängige Variabele x auch wohl als das *Argument* der Function $f(x)$ etc.

Fig. 3.



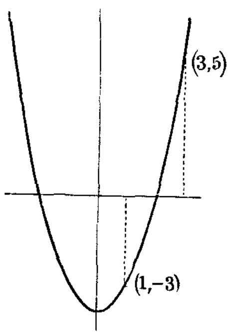
Ist die Gleichung, durch welche man eine Function giebt, noch nicht nach y aufgelöst, so spricht man von einer *unentwickelten oder impliciten Angabe der Function* und nennt in abgekürzter Sprechweise für diesen Fall wohl auch die Function selbst eine *unentwickelte* oder *implicite*. Als Beispiel diene die durch die Gleichung:

$$y^2 - x - 6y + 11 = 0$$

gegebene Function y von x. Die gleiche Function ist als *explicite*, d. i. *entwickelte Function* definirt oder kurz *explicite* gegeben durch die Gleichung:

$$y = 3 + \sqrt{x - 2}.$$

Fig. 4.



Als symbolische Schreibweisen impliciter Functionen dienen Gleichungen der Gestalt $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ u. s. w.

Um eine *geometrische Versinnlichung der Functionen* zu gewinnen, benutzt man für gewöhnlich ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene, wie es in der analytischen Geometrie gebräuchlich ist. Der einzelne Punkt der Ebene bekommt eine *Abscisse* x und eine *Ordinate* y (vergl. Fig. 3), die wir auch zusammenfassend die *Coordinaten* x, y

des Punktes nennen. Alle Punkte, deren Coordinaten x, y eine Gleichung $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ befriedigen, bilden eine in der Ebene gelegene *Curve*, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird.

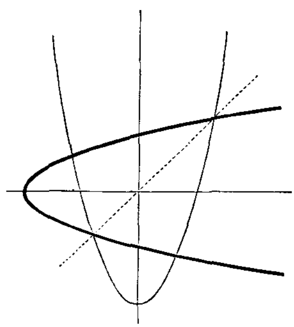
Lehrsatz: *Deutet man x und y als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, so stellt die Gleichung $y = f(x)$ oder $F(x, y) = 0$ eine in dieser Ebene gelegene Curve dar; diese Curve benutzt man als geometrisches Bild der durch $y = f(x)$ bezw. $F(x, y) = 0$ gegebenen Function.*

So ist z. B. in Fig. 4 die Curve gezeichnet, welche das geometrische Bild der Function $y = x^2 - 4$ ist. Für einige Punkte sind in der Figur die Werthe der Coordinaten in Klammern hinzugesetzt.

3. Inversion oder Umkehrung der Functionen.

Sieht man in der Gleichung $y = f(x)$ nicht wie bisher x, sondern y als die unabhängige Variabele an, so wird x eine Function von y sein. Dieser Auffassung entspricht man dadurch, dass man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst, was $x = \varphi(y)$ geben mag. Hier nehmen wir, damit fortan wieder x als Benennung der unabhängigen Variabelen diene, einen Austausch in der Bezeichnung beider Variabelen vor.

Fig. 5.



Man wird so zur Function $y = \varphi(x)$ geführt, welche die zu $f(x)$ „inverse" oder „umgekehrte" Function heisst. Der Process des Ueberganges von $f(x)$ zu $\varphi(x)$ heisst entsprechend „Inversion" oder „Umkehrung" der Function $f(x)$.

Das Verhältniss von $f(x)$ zur inversen Function $\varphi(x)$ ist ein gegenseitiges, d. h. zu $\varphi(x)$ ist wiederum $f(x)$ invers.

Zu einander invers sind z. B. die Functionen $f(x) = x^n$ und $\varphi(x) = \sqrt[n]{x}$ oder $f(x) = x^2 - 1$ und $\varphi(x) = \sqrt{x + 1}$ u. s. w.

Geometrisch vollzieht sich der Process der Inversion durch eine solche Umlegung der xy-Ebene, dass die positive x-Axe auf die positive y-Axe zu liegen kommt und umgekehrt; weiter hat man dann noch die Bezeichnungen x und y auszuwechseln. Diese Maassregel kommt hinaus auf folgenden

Lehrsatz: *Um aus der Curve einer Function $f(x)$ das geometrische Bild der inversen Function $\varphi(x)$ zu gewinnen, hat man jene Curve um die Halbirungslinie des von der positiven x-Axe und der positiven y-Axe gebildeten Winkels umzuklappen.*

Für die in Fig. 4 dargestellte Curve der Function $(x^2 - 4)$ ist diese Operation in Fig. 5 ausgeführt; die neue Curve, welche somit der Function $\sqrt{x + 4}$ zugehört, ist stärker ausgezogen. Man bemerkt, dass hier zu jeder Abscisse $x > -4$ zwei einander genau entgegengesetzte Ordinaten y gehören. Dies entspricht dem Umstande, dass wir die Quadratwurzel $\sqrt{x+4}$ sowohl mit dem positiven wie negativen Zeichen versehen dürfen. Die hierin liegende Zweideutigkeit kommt in der Formel $y = \pm\sqrt{x+4}$ direct zum Ausdruck.

4. Die rationalen und die irrationalen Functionen.

I. Eine der einfachsten Functionen, welche man bilden kann, ist die *Potenz* $y = x^n$ mit ganzem positiven Exponenten n.

Multiplicirt man x^n mit der Constanten a und bildet die Summe mehrerer solcher Producte, wie z. B.

$$y = ax^n + bx^m + cx^l,$$

so gewinnt man eine *„ganze rationale Function“*.

Der höchste hierbei auftretende Exponent von x heisst der *Grad der ganzen Function.* Ist der Grad $= 1$, so spricht man auch von einer *linearen* ganzen Function.

Eine ganze rationale Function wird „geordnet“, indem man die Glieder mit gleichen Potenzen von x zusammenfasst und sodann alle Glieder nach ansteigenden Potenzen von x anordnet.

Lehrsatz: *Eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von x hat die geordnete Gestalt:*

$$(1) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constante Coëfficienten sind.

II. Bildet man den Quotienten zweier ganzen rationalen Functionen oder auch die Summe mehrerer solcher Quotienten, so entsteht eine *gebrochene rationale Function* oder eine *„rationale Function“* schlechthin.

Man „ordnet“ eine rationale Function, indem man für die als Nenner auftretenden ganzen Functionen den Generalnenner bildet, die verschiedenen Brüche addirt und sodann die beiden hierbei oberhalb und unterhalb des Bruchstriches auftretenden ganzen rationalen Functionen ordnet.

Lehrsatz: *Eine rationale Function von x hat die geordnete Gestalt:*

$$(2) \qquad y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m},$$

wo die a und b constante Coëfficienten sind. Die grössere unter den beiden Zahlen oder, falls beide gleich sind, eine von ihnen liefert den Grad der rationalen Function.

Ist der Grad $= 1$, so spricht man auch von einer *linearen* Function.

III. Die einfachste *„irrationale Function“* von x ist $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

Ein complicirteres Beispiel einer irrationalen Function von x ist die n^{te} Wurzel aus einer beliebigen rationalen Function von x. Allgemein gilt folgende

Erklärung: *Man spricht von einer irrationalen Function von x, wenn zur Berechnung des Werthes der Function neben rationalen Rechnungsarten noch eine oder mehrere Wurzelziehungen auszuüben sind.*

Beispiele irrationaler Functionen sind:

$$y = \sqrt[3]{ax + b}, \quad y = \sqrt[n]{\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}} \text{ u. s. w.}$$

5. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Functionen.

Erklärung: *Eine Function $y = f(x)$ heisst für einen speciellen Werth x n-deutig, wenn die durch den Ausdruck von $f(x)$ gegebene Vorschrift zur Berechnung von y für jenen Werth von x im Ganzen n verschiedene Werthe y als zugehörig liefert.*

So ist z. B. die Function $y = \sqrt{x - 1}$ für alle x, die > 1 sind, zweideutig, da man die Quadratwurzel sowohl mit positivem als negativem Zeichen versehen kann. Für $x = 1$ ist die Function $\sqrt{x - 1}$ eindeutig, für $x < 1$ nulldeutig, d. h. die durch $f(x)$ gegebene Rechenvorschrift führt hier auf keinen reellen Werth y.

Ist $y = f(x)$ für einen besonderen Werth x n-deutig, so liefert die zu $f(x)$ gehörende Curve für die Abscisse x im ganzen n Ordinaten y (vergl. Fig. 5, S. 3).

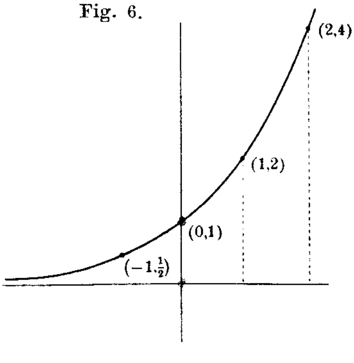
Lehrsatz: *Die rationalen Functionen sind für alle Werthe des Argumentes x eindeutig. Die irrationalen Functionen liefern Beispiele mehrdeutiger Functionen.*

6. Exponentialfunction und Logarithmus.

I. Ist a eine positive Zahl, so hat a^x für jeden Werth x einen bestimmten *positiven* Werth.

Erklärung und Lehrsatz: *Die Function $y = a^x$ mit positivem a heisst „Exponentialfunction" der Basis a. Die Exponentialfunction ist für jeden Werth x eindeutig und hat beständig positiven Zahlwerth.*

Fig. 6.

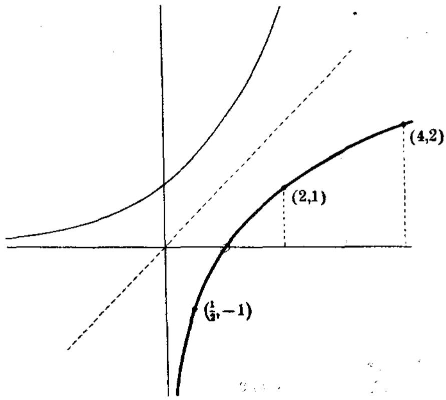


In der Regel ist $a > 1$. Als Beispiel diene $a = 2$, wo die *Exponentialfunction* den in Fig. 6 angegebenen Verlauf zeigt. An einzelnen Punkten der Curve sind die zugehörigen Werthe der Coordinaten in Klammern beigefügt.

II. Erklärung: *Die zur Exponentialfunction inverse Function ist $y = {}^a\log x$ und heisst „Logarithmus" der Basis a.*

Die aus Fig. 6 nach der Regel von S. 3 hergestellte *Logarithmuscurve* für $a = 2$ ist in Fig. 7 durch stärkeres Ausziehen hervorgehoben.

Fig. 7.



Lehrsatz: *Die Function $y = {}^a\log x$ ist für alle positiven x eindeutig, für alle negativen x nulldeutig.*

Dies tritt in Fig. 7 direct hervor: Die Logarithmuscurve verläuft durchaus rechts von der y-Axe und liefert hierselbst für jedes x ein und nur ein y.

Ist $a > 1$, so gelten die Formeln:

(1) $\quad {}^a\log(0) = -\infty, \quad {}^a\log(1) = 0, \quad {}^a\log(+\infty) = +\infty.$

7. Gradmaass und Bogenmaass der Winkel.

Statt des in der Trigonometrie gebräuchlichen Gradmaasses der Winkel benutzt man in der höheren Mathematik gewöhnlich das sogen. Bogenmaass der Winkel.

Erklärung: *Ein Winkel wird gemessen durch die Länge desjenigen Kreisbogens vom Radius 1, zu welchem der Winkel als Centriwinkel gehört.*

Hat ein Winkel von α Grad in Bogenmaass die Grösse s (vergl. Fig. 8, folg. Seite), so gilt die Formel:

(1) . . . . $s = \dfrac{\pi\alpha}{180}.$

Hieraus ergiebt sich folgende Tabelle:

α	1^0	90^0	180^0	270^0	360^0
s	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Will man s als unbeschränkte Variabele auffassen, so legt man an Stelle des Kreises vom Radius 1 zur geometrischen Deutung von s eine „Zahlenlinie" (vergl. S. 1) zu Grunde, auf welcher man den Kreis des Radius 1 nach der positiven und negativen Seite unendlich oft abgewickelt denkt.

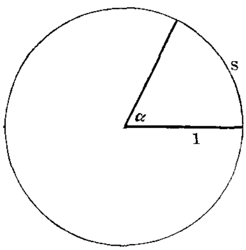
Lehrsatz: *Bei der letzteren Auffassung gewinnt ein und derselbe geometrisch gegebene Winkel unendlich viele Maasszahlen s, welche alle aus einer unter ihnen durch Zufügen beliebiger Multipla von 2π entstehen.*

So bekommt ein rechter Winkel die Maasszahlen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{2} \pm 4\pi, \ldots$

8. Die trigonometrischen Functionen.

Erklärung: *Als Argument der trigonometrischen Functionen sin, cos, tg, ctg wird nicht die Gradzahl, sondern das Bogenmaass s eines Winkels angesehen. Um s als variabel zu charakterisiren, schreiben wir x statt s und legen zur Deutung der Werthe s = x sogleich die Zahlenlinie (x-Axe) zu Grunde.*

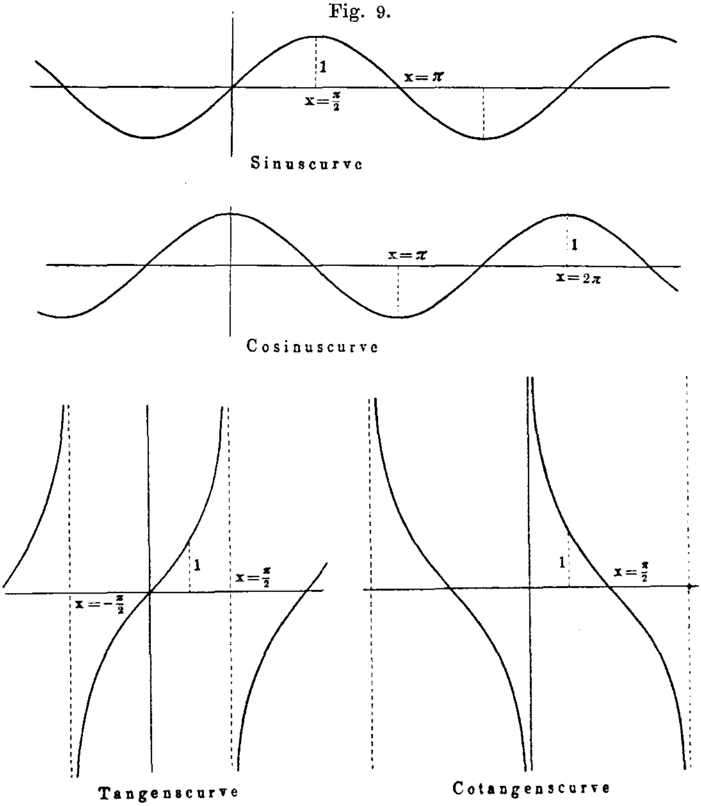
Fig. 8.



Den vier Functionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$ entsprechen ebenso viele „*trigonometrische Curven*“, welche in Fig. 9 zusammengestellt sind.

Lehrsatz: *Die trigonometrischen Functionen sind für jeden Werth des Argumentes x eindeutig.*

Fig. 9.



In den Figuren kommt dies dadurch zum Ausdruck, dass für jeden Werth x durch die einzelne Curve ein und nur ein y geliefert wird.

Zwei Werthe x, welche um ein Multiplum von 2π verschieden sind, liefern dieselben Winkel und also gleiche Werthe der Functionen.

Lehrsatz: *Die trigonometrischen Functionen heissen periodische Functionen, weil sie ihren Werth nicht ändern, falls man das Argument x um 2π vermehrt oder vermindert.*

Die Functionen $tg\,x$ und $ctg\,x$ bleiben auch bereits bei Vermehrung oder Verminderung des Argumentes x um π unverändert, während $sin\,x$ und $cos\,x$ hierbei das Zeichen wechseln:

(1) . . $sin\,(x \pm \pi) = -\,sin\,x, \quad cos\,(x \pm \pi) = -\,cos\,x,$

(2) . . $tg\,(x \pm \pi) = tg\,x, \quad ctg\,(x \pm \pi) = ctg\,x.$

Man benennt dieserhalb 2π als die „*Periode*“ von $sin\,x$ und $cos\,x$, π als diejenige von $tg\,x$ und $ctg\,x$.

9. Die cyklometrischen Functionen.

Erklärung: *Die den vier trigonometrischen Functionen inversen Functionen heissen die „cyklometrischen“ Functionen und werden durch $arc\,sin\,x$, $arc\,cos\,x$, $arc\,tg\,x$, $arc\,ctg\,x$ bezeichnet. Es ist somit z. B. die Gleichung $y = arc\,sin\,x$ gleichbedeutend mit $x = sin\,y$, so dass in $y = arc\,sin\,x$ der Werth y die Maasszahl eines Bogens bedeutet, dessen Sinus den Werth x hat.*

Fig. 10.

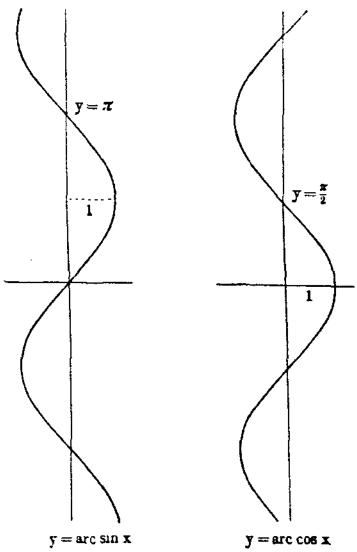
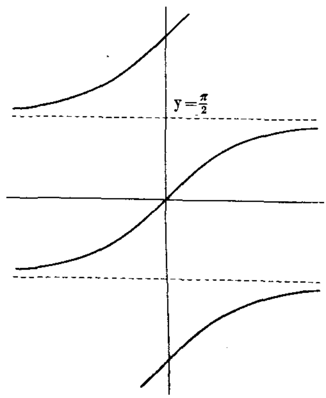


Fig. 11.



Die vier *cyklometrischen Curven* entspringen aus denen der Fig. 9 nach der S. 3 angegebenen Regel. Fig. 10 liefert die Curven für $arc\,sin\,x$ und $arc\,cos\,x$, Fig. 11 die für $arc\,tg\,x$.

Aus den Figuren entspringt folgender

Lehrsatz: *Die Functionen* $arc \sin x$ *und* $arc \cos x$ *sind für die Werthe von* x *im Intervall von* -1 *bis* $+1$ *unendlich-vieldeutig, ausserhalb dieses Intervalles aber stets nulldeutig. Die Functionen* $arc\, tg\, x$ *und* $arc\, ctg\, x$ *sind für jeden endlichen Werth von* x *unendlich vieldeutig.*

Unter den unendlich vielen Werthen, welche die Function $arc \sin x$ für ein dem Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ angehörendes x besitzt, wird als „*Hauptwerth*" derjenige Werth y angesehen, welcher dem Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$ angehört. Aus dem Hauptwerthe y berechnen sich alle übrigen Werthe der Function in den Gestalten:

$$y + 2\nu\pi \quad \text{und} \quad -y + (2\nu + 1)\pi,$$

wo beide Male ν alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen soll.

Der Hauptwerth y der Function $arc\, tg\, x$ soll gleichfalls dem Intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ angehören; alle übrigen Werthe dieser Function sind dann in der Gestalt $(y + \nu\pi)$ enthalten.

Es gelten die Formeln:

$$(1) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} arc \cos x = \frac{\pi}{2} - arc \sin x, \\ arc\, ctg\, x = \frac{\pi}{2} - arc\, tg\, x. \end{cases}$$

10. Algebraische und transcendente Functionen.

Die vorstehend besprochenen Functionen sind sämmtlich bereits in der Elementarmathematik bekannt und heissen dieserhalb „*die elementaren Functionen*".

Erklärung: *Die unter Nr. 4 besprochenen rationalen und irrationalen Functionen nennt man zusammenfassend „die elementaren algebraischen Functionen"; die Exponentialfunction, der Logarithmus, die trigonometrischen und die cyklometrischen Functionen heissen „die elementaren transcendenten Functionen".*

11. Zusammengesetzte Functionen.

Erklärung: *Setzt man als Argument in die Function* f *nicht* x, *sondern die Function* $\varphi(x)$ *von* x *ein, so wird* $f[\varphi(x)]$ *selbst wieder eine Function von* x, *die wir abgekürzt* $F(x)$ *nennen wollen:*

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad y = F(x) = f[\varphi(x)]$$

und als eine „zusammengesetzte" Function von x *bezeichnen.*

Man sagt auch, es handle sich hier um „*eine Function einer Function*" von x.

Beispiele zusammengesetzter Functionen liefern bereits die S. 4 betrachteten irrationalen Functionen; in $y = \sqrt[3]{ax + b}$ ist zunächst die lineare Function $\varphi(x) = ax + b$ zu bilden und dann die dritte Wurzel zu ziehen.

Man kann auch weitergehen und $f[\varphi(x)]$ als Argument in eine Function Φ einsetzen u. s. w. Ein Beispiel ist:

$$y = \sin [\log (ax + b)].$$

12. Der Begriff der Grenze.

Erklärung: *Will man bei einer (positiven oder negativen) Zahl a vom Vorzeichen absehen, so sagt man, die Zahl a solle „absolut genommen" werden; der hierbei sich ergebende „absolute Betrag" der Zahl a wird durch $|a|$ bezeichnet.*

Setzt man:

(1) . . . $a_1 = 0{,}3, \quad a_2 = 0{,}33, \quad a_3 = 0{,}333, \ldots,$

so kann man ein a_n mit so grossem Index n angeben, dass sowohl a_n wie alle folgenden Zahlen $a_{n+1}, a_{n+2} \ldots$ von dem Werthe $1/3$ so wenig, als man will, verschieden sind. Dieserhalb heisst $1/3$ die „*Grenze*" der Zahlenreihe (1).

Etwas genauer lässt sich dasselbe Sachverhältniss so aussprechen: Wählt man eine beliebig kleine Zahl δ, die jedoch > 0 sein soll, so lässt sich eine zu diesem δ gehörende endliche ganze Zahl n angeben, so dass für alle Indices $m \geqq n$ die Ungleichung $|1/3 - a_m| < \delta$ gilt.

Erklärung: *Es sei irgend eine unendliche Zahlenreihe:*

(2) . . . . $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$

vorgelegt und es existire eine endliche Zahl g von folgender Art: Nach Auswahl einer „beliebig" kleinen Zahl δ, die jedoch > 0 ist, soll es stets einen zu diesem δ gehörenden endlichen Index n geben, so dass für $m \geqq n$ der absolute Betrag $|g - a_m| < \delta$ ist. Kann wirklich eine solche Zahl g angegeben werden, so heisst sie die „Grenze" oder der „Limes" der Zahlenreihe (2) und wird durch:

(3) . . . . $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$

bezeichnet.

Zusatz: *Ist die Zahlenreihe (2) so beschaffen, dass nach Auswahl eines beliebig grossen, jedoch endlichen Betrages ω stets ein zugehöriges n angegeben werden kann, so dass für alle Indices $m \geqq n$ die Ungleichung $|a_m| > \omega$ gilt, so sagt man, die Zahlenreihe (2) besitze die Grenze ∞:*

(4) . . . . $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty.$

Beispiel: Vermöge einer Zahl $q > 1$ bilde man die Reihe:

(5) . . . . . . $a_1 = q, \quad a_2 = q^2, \quad a_3 = q^3 \ldots,$

wobei $a_{n+1} > a_n$ allgemein gilt. Entweder existirt eine endliche Zahl $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$ oder es ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$.

Gesetzt, der erste Fall treffe zu, so ist für jedes endliche l nothwendig $a_l < g$. Nun kann man wegen $q > 1$ ein vorschriftsmässiges δ so wählen, dass

$$\delta < g\left(1 - \frac{1}{q}\right) \quad \text{oder entwickelt} \quad q\,(g - \delta) > g$$

zutrifft. Dann lässt sich ein endlicher Index m angeben, so dass $g - a_m < \delta$ oder also $a_m > g - \delta$ ist. Durch Multiplication mit der positiven Zahl q folgt:

$$q\,a_m = a_{m+1} > q\,(g - \delta) > g,$$

so dass a_{m+1} bereits g übertrifft. Es ist somit $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \lim\limits_{n=\infty} q^n = \infty$.

Ist $0 < r < 1$, so ist $\frac{1}{r} = q > 1$, und man hat:

$$r^n = \frac{1}{q^n}, \quad \text{sowie} \quad \lim_{n=\infty} r^n = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{q^n}\right) = 0.$$

Lehrsatz: *Ist* $q > 1$, *so ist* $\lim\limits_{n=\infty} q^n = \infty$. *Ist* $0 < r < 1$, *so ist* $\lim\limits_{n=\infty} r^n = 0$.

13. Stetigkeit einer Variabelen und stetige Annäherung an eine Grenze.

Erklärung: *Führt der Bildpunkt einer Variabelen x auf der Zahlenlinie irgend welche Bewegungen im gewöhnlichen Sinne des Wortes aus, so bezeichnet man die hierdurch gegebenen Veränderungen der Variabelen x als „stetige“ oder nennt kurz x eine „stetige Variabele“.*

Wächst eine stetige Variabele um einen endlichen Betrag oder nimmt sie um einen solchen ab, so wird sie *alle* zwischen dem Anfangs- und Endwerthe liegenden Zahlwerthe *in der natürlichen Folge* durchlaufen.

Die in Nr. 12 betrachtete Annäherung einer Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$ an eine Grenze g heisst „*unstetig*“, weil hier sprungweise von der einzelnen Zahl a zur folgenden übergegangen wird.

Dem gegenüber gilt folgende

Erklärung: *Man spricht von einer „stetigen“ Annäherung der Variabelen x an eine endliche Grenze g, falls x solche stetige Veränderungen erfährt, dass nach Auswahl einer beliebig kleinen Grösse δ, die jedoch > 0 sein soll, im Laufe der Veränderung des x die Ungleichung $|g - x| < \delta$ richtig wird und weiterhin richtig bleibt.*

Eine stetige Variabele x kann zufolge der Definition den Werth ∞ nicht annehmen. Indessen kann man mit x solche stetige Veränderungen vornehmen, dass nach Auswahl einer beliebig grossen aber endlichen Zahl ω im Laufe der Veränderung des x die Ungleichung $x > \omega$ richtig wird und weiterhin richtig bleibt. Man spricht dann von *einer stetigen Annäherung des x an die Grenze ∞.*

In diesem Falle wird sich der reciproke Werth $\frac{1}{x}$ stetig der Grenze 0 annähern.

14. Einführung der Zahl e.

Sind a und b irgend zwei den Bedingungen:

(1) . . . . $a > b > 0$

genügende Zahlen und ist n eine positive ganze Zahl, so gilt:

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n < (n+1)a^n.$$

Hieraus folgt:

$$a^{n+1} - b^{n+1} < (a - b)(n + 1)a^n,$$

sowie weiter durch Transposition:

(2) . . . . $a^n [a - (a - b)(n + 1)] < b^{n+1}.$

Setzen wir in (2) die mit (1) in Uebereinstimmung befindlichen Werthe:

$$a = 1 + \frac{1}{n}, \quad b = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ein, so ergiebt sich:

(3) . . . . $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$

Setzt man aber die wieder in Uebereinstimmung mit (1) gewählten Werthe:

$$a = 1 + \frac{1}{2n}, \quad b = 1$$

in (2) ein, so ergiebt sich:

(4) . $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} < 1$ und also $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$

Setzt man nunmehr $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, so folgt aus (3), dass in der Reihe der positiven Zahlen $a_1 = 2, a_2, a_3 \ldots$ jede folgende grösser als die voraufgehende ist, und aus (4), dass keine Zahl a_n den Betrag 4 erreicht.

Wir schliessen auf die Existenz einer Grenze $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$, welche zwischen 2 und 4 gelegen ist. Diese Grenze trägt die besondere Bezeichnung e.

Lehrsatz: *Unter der Zahl e versteht man die Grenze der Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$, wenn a_n den Zahlwerth $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bedeutet:*

(5) . . . . $e = \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

Die Zahl e ist irrational und angenähert gegeben durch:

(6) . . . . $e = 2{,}718\,281\,8\ldots$

Ist x eine stetige Variabele, die > 1 und für den Augenblick von einer ganzen Zahl verschieden ist, so liege x zwischen den ganzen Zahlen n und $(n+1)$. Aus $n < x < n+1$ folgt:

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x$$

oder, wenn man die positiven *echten* Brüche $x - n = \sigma$, $n + 1 - x = \tau$ einführt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\sigma} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1-\tau},$$

(7) $$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\left(1+\frac{\sigma}{n}\right)} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\left(1-\frac{\tau}{n+1}\right)}.$$

Nähert sich jetzt x der Grenze ∞, so wächst auch n über alle Grenzen, und es ist demnach $lim.\ \frac{\sigma}{n} = 0$ und $lim.\ \frac{\tau}{n+1} = 0$. In (7) werden somit die rechte und linke Seite übereinstimmend die Grenze e haben; der in der Mitte stehende Ausdruck hat also gleichfalls e zur Grenze.

Lehrsatz: *Auch wenn x als „stetige" Variabele sich der Grenze ∞ nähert, gilt die Gleichung:*

(8) . . . . $$\lim_{x=\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

15. Stetigkeit der Functionen.

Erklärung: *Eine Function $y = f(x)$ heisst stets dann „stetig", wenn bei stetiger Veränderung des Argumentes x auch die Function y stetig variabel ist.*

Die Curve der Function $y = f(x)$ verläuft für alle Werthe x, für welche $f(x)$ stetig ist, *zusammenhängend.*

Die elementaren Functionen können nur für einzelne Werthe x aufhören, stetig zu sein. Findet dies für $y = f(x)$, z. B. bei $x = a$ statt, so sagt man, *die Function $f(x)$ werde bei $x = a$ unstetig.*

Man unterscheidet *zwei* Arten von Unstetigkeiten:

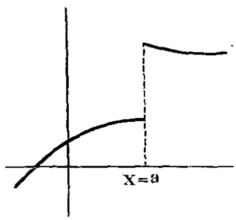
1. Da eine Variabele y, so lange sie stetig ist, nothwendig endlich ist, so wird eine Function $y = f(x)$ für alle diejenigen Werthe von x unstetig werden, für welche sie unendlich wird.

Man spricht in diesem Falle von einer *„Unstetigkeit durch Unendlichwerden"*. Von dieser Art ist die Unstetigkeit von $y = {}^a\!log\, x$ bei $x = 0$ (vergl. Fig. 7, S. 6).

Liegt für $x = a$ eine Unstetigkeit dieser ersten Art bei $y = f(x)$ vor, so wird y für *lim.* $x = a$ im Sinne des Schlusses von Nr. 13 als „stetige“ Variabele sich der Grenze ∞ annähern. Es wird somit der reciproke Werth $\frac{1}{y}$, welcher für $x = a$ verschwindet, bei $x = a$ *stetig* bleiben. Als Beispiel diene die Function $y = \frac{1}{x - a}$.

2. Erleidet eine Function $y = f(x)$, falls das Argument als stetige Variabele den Werth $x = a$ passirt, eine plötzliche Werthänderung um einen endlichen Betrag, so sagt man, die Function $f(x)$ erfahre bei $x = a$ eine „*Unstetigkeit durch endlichen Sprung*“.

Fig. 12.



In Fig. 12 ist diese Art der Unstetigkeit am Curvenverlauf versinnlicht.

Unstetigkeiten durch endliche Sprünge kommen zwar bei „zusammengesetzten“ elementaren Functionen (S. 9) vor, spielen indessen weiterhin keine besondere Rolle. —

Bei manchen Functionen kann man sagen, dass sie für $x = \infty$ einen bestimmten Werth besitzen. Dies ist der Fall, wenn für *lim.* $x = \infty$ die Function y sich einer Grenze annähert, die auch ∞ sein kann.

So wird die Function $y = 2^x$ für $x = +\infty$ selber ∞, für $x = -\infty$ aber gleich 0 (vergl. Fig. 6, S. 5).

Die trigonometrischen Functionen nähern sich für *lim.* $x = \infty$ keiner Grenze an.

II. Capitel.

Erklärung und Berechnung des Differentialquotienten einer Function $f(x)$.

1. Der Differenzenquotient einer Function $f(x)$.

Es sei $y = f(x)$ eine „elementare“ Function, und es seien x und x_1 irgend zwei endliche Argumente, die in einem solchen Intervall gelegen sind, in welchem $f(x)$ überall eindeutig und stetig ist.

Zu x und x_1 gehören die Werthe $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1)$ der Function. Wir führen alsdann die Differenzen ein:

(1) . . . . $x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y.$

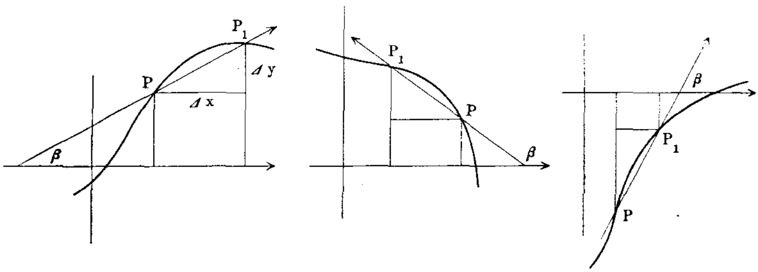
Erklärung: *Der Quotient der Differenzen Δy und Δx:*

(2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

heisst Differenzenquotient der Function $f(x)$ für das Argumentenpaar x, x_1 oder kurz „Differenzenquotient von $f(x)$“.

Zur geometrischen Deutung des Differenzenquotienten markire man auf der zu $y = f(x)$ gehörenden Curve die Punkte P und P_1 der Coordinaten x, y und x_1, y_1 und versehe die Secante $\overline{PP_1}$ mit einem „nicht nach unten“ gerichteten Pfeile.

Fig. 13.



Lehrsatz: *Der Differenzenquotient ist gleich $tg\,\beta$, wenn β der Winkel zwischen der Pfeilrichtung der Secante $\overline{PP_1}$ und der positiven Richtung der x-Axe ist.*

Fig. 13 erläutert dies in einigen Fällen.

2. Die Differentiale und der Differentialquotient einer Function $f(x)$.

Während x für den Augenblick festbleiben soll, möge sich x_1 als stetige Variabele der Grenze x annähern.

Dabei tritt für die Secante $\overline{PP_1}$ die *Tangente im Punkte P* an die Curve als Grenzlage ein. *Der Differenzenquotient aber nähert sich als stetige Veränderliche dem Werthe $tg\,\alpha$ an, wo α der Winkel zwischen der nicht nach unten gerichteten Curventangente im Punkte P und der positiven Richtung der x-Axe ist* (vergl. Fig. 14, a. f. S.).

Der vorliegende Grenzprocess soll so vollzogen werden, dass die veränderliche Differenz Δx, und damit auch Δy, sich *als stetige Variabele* der Grenze 0 nähert, *ohne mit 0 identisch zu werden.*

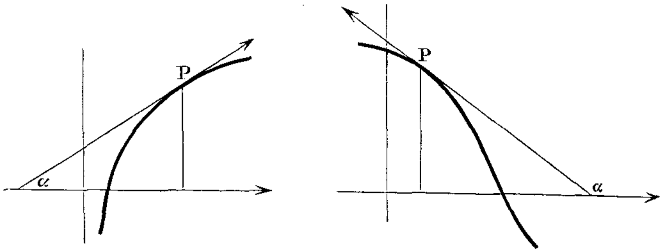
Es werden somit Δx und damit Δy *ohne Ende klein* oder, wie man kurz sagt, *„unendlich klein“*.

Erklärung: *Um die so gedachten Differenzen kurz bezeichnen zu können, schreibt man sie dx und dy und nennt sie „Differentiale“; speciell heisst dx das Differential des Argumentes und $dy = df(x)$ das Differential der Function.*

An Stelle der umständlichen Ausdrucksweise „*Grenzwerth des Differentialquotienten*“ (der natürlich nichts anderes als der Grenzwerth des Differenzenquotienten ist), ist man übereingekommen, kurz die Benennung „*Differentialquotient*“ selbst zu setzen und entsprechend an Stelle von $lim. \frac{dy}{dx}$ kurz $\frac{dy}{dx}$ zu schreiben.

Es entstammt dieser Brauch der zwar nicht correcten, aber in praxi brauchbaren Vorstellung, dass man sich das Differential dx als „constante“ und „im Vergleich zu den sonstigen Grössen der Untersuchung ausserordentlich kleine Zahl“ denkt.

Fig. 14.



Lehrsatz: *Der Differentialquotient einer Function $y = f(x)$ für den Werth x des Argumentes:*

$$(1) \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

ist seiner geometrischen Bedeutung und seinem Zahlwerthe nach gegeben durch $tg\,\alpha$, wo α der Winkel zwischen der nicht nach unten gerichteten Tangente der Curve in dem zum fraglichen Argumente x gehörenden Punkte P und der positiven Richtung der x-Axe ist.

3. Die derivirte oder abgeleitete Function $f'(x)$.

Gestattet man jetzt der eben gedachten Grösse x, irgend welche Veränderungen zu erfahren, so wird sich der Werth des Differentialquotienten $\frac{d f(x)}{dx}$ mit x ändern (vergl. Fig. 14) und also eine Function von x vorstellen.

Erklärung: *Der Differentialquotient der Function $y = f(x)$ wird in seiner Abhängigkeit von x durch $f'(x)$ bezeichnet:*

$$(1) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = f'(x);$$

$f'(x)$ heisst die „derivirte“ oder „abgeleitete“ Function oder kurz die „Ableitung“ von $f(x)$.

Die Gleichung (1) setzt man auch in die Form:

(2) . . . . $dy = df(x) = f'(x)\,dx$

und beschreibt sie in dieser Gestalt durch den

Lehrsatz: *Das Differential $dy = df(x)$ der Function $f(x)$ ist gleich dem Product der abgeleiteten Function $f'(x)$ und des Differentials dx des Argumentes.*

Das Differential $df(x)$ erscheint hierbei *abhängig von den „beiden" Grössen x und dx.*

Dem genauen Sinne nach stellt Formel (2) nichts anderes als (1) dar. Fasst man indessen dx als constanten und ausserordentlich kleinen Zuwachs von x, so gilt die Gleichung (2) für den entsprechenden Zuwachs dy von y nur angenähert.

Die Berechnung des Differentialquotienten und damit der abgeleiteten Function $f'(x)$ einer gegebenen Function $f(x)$ heisst *Differentiation der Function $f(x)$.*

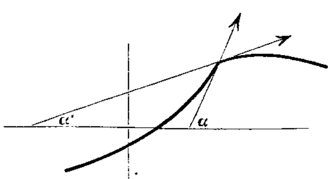
Es ist die *Grundaufgabe der Differentialrechnung, für vorgelegte Functionen die Differentiation zu leisten.*

4. Unstetigkeiten der abgeleiteten Function.

Aus der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten ergiebt sich folgender

Lehrsatz: *Die abgeleitete Function $f'(x)$ wird für $x = a$ unstetig durch Unendlichwerden, falls in dem Punkte $x = a$, $y = f(a)$ der zu $f(x)$ gehörenden Curve die Tangente parallel zur y-Axe läuft.*

Fig. 15.



Die Ableitung $f'(x)$ wird bei $x = a$ unstetig durch endlichen Sprung, falls die zu $y = f(x)$ gehörende Curve im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ eine Einknickung erfährt.

Letzteres Vorkommniss ist durch Fig. 15 versinnlicht, kommt übrigens weiterhin kaum zur Geltung.

5. Differentiation einer Summe, sowie eines Productes aus einer Constanten und einer Function.

Ist $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, so folgt:

$$(1)\qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} + \frac{\psi(x_1) - \psi(x)}{x_1 - x}.$$

Für $lim.\ x_1 = x$ ergiebt sich:

$$(2)\qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx},\quad f'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x).$$

Lehrsatz: *Eine Summe von zwei oder mehreren Functionen wird differentiirt, indem man jedes Glied differentiirt und die Summe der so entspringenden Ableitungen bildet.*

Ist $f(x) = a\,\varphi(x)$, so ist:

$$(3)\qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = a\,\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} \text{ und also } f'(x) = a\,\varphi'(x).$$

Lehrsatz: *Die Ableitung von $a\,\varphi(x)$, wo a einen constanten Factor bedeutet, ist $a\,\varphi'(x)$. Die Constante a tritt somit vor das Differentialzeichen:*

$$(4)\qquad \frac{d\,[a\,\varphi(x)]}{dx} = a\,\frac{d\,\varphi(x)}{dx} \text{ oder kurz } d\,[a\,\varphi(x)] = a\,d\,\varphi(x).$$

6. Differentiation der Potenz und der ganzen rationalen Function.

Ist $y = f(x) = x^n$ mit ganzem positiven n, so ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}\,x + x_1^{n-3}\,x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

und also folgt:

$$\lim_{x_1 = x}\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right) = n\,x^{n-1},$$

eine Formel, die auch für $n = 0$ gilt.

Lehrsatz: *Die Ableitung der Potenz $y = x^n$ mit ganzem, nichtnegativen Exponenten n ist $n\,x^{n-1}$:*

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d\,(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1} \quad \textit{oder} \quad d\,(x^n) = n\,x^{n-1}\,dx.$$

Vermöge Nr. 5 folgt hieraus der

Lehrsatz: *Die Ableitung der ganzen rationalen Function n^{ten} Grades:*

$$(2)\quad .\;.\quad y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ist gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots + n\,a_n x^{n-1}.$$

Speciell für $n = 1$ und $n = 0$ gilt der

Lehrsatz: *Die Ableitung einer linearen ganzen Function ist constant, die Ableitung einer Constanten ist gleich Null.*

7. Differentiation des Logarithmus. Der natürliche Logarithmus.

Für die S. 5 eingeführte Function $y = {}^a\!log\,x$ ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{}^a\!log\,(x + \Delta x) - {}^a\!log\,x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\,{}^a\!log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Setzt man hier abkürzend $\dfrac{x}{\Delta x} = v$, so wird sich, wenn man Δx

positiv wählt (vergl. S. 6), v der Grenze $+\infty$ annähern, sofern Δx unendlich klein wird. Es folgt [vergl. (8), S. 13]:

(1) $$\frac{d\,{}^a\!\log x}{dx} = \frac{1}{x}\cdot \lim_{v=\infty} {}^a\!\log\left[\left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right] = \frac{1}{x}\cdot {}^a\!\log e.$$

Man setze den rechts auftretenden Factor ${}^a\!\log e = b$; dann ist:

(2) . . . . $a^b = e$ und also $b\,.\,{}^e\!\log a = 1$.

Erklärung: *Der Logarithmus der positiven Zahl a zur Basis e heisst der „natürliche" Logarithmus von a und wird kurz durch log a, d. h. ohne Angabe der Basis, bezeichnet.*

Aus (1) und (2) folgt der

Lehrsatz: *Die Differentiation des Logarithmus ist gegeben durch:*

(3) . . $$\frac{d\,{}^a\!\log x}{dx} = \frac{1}{x\log a} \quad oder \quad d\,{}^a\!\log x = \frac{dx}{x\log a}\cdot$$

Speciell folgt für den natürlichen Logarithmus:

(4) . . . . $$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \quad oder \quad d\log x = \frac{dx}{x}\cdot$$

Die Einfachheit dieser Formel rechtfertigt die Benennung „natürlicher" Logarithmus.

Setzt man:

$$y = {}^a\!\log x, \qquad z = \log x,$$

so ist $x = a^y$ und also:

$$z = \log(a^y) = y\cdot\log a, \qquad {}^a\!\log x = \left(\frac{1}{\log a}\right)\cdot\log x.$$

Erklärung: *Den reciproken Werth des natürlichen Logarithmus von a nennt man den „Modul des Logarithmensystems der Basis a" und bezeichnet ihn durch M_a:*

(5) . . . . $$M_a = \frac{1}{\log a}\cdot$$

Lehrsatz: *Der Logarithmus irgend einer positiven Zahl im Logarithmensystem der Basis a entsteht aus dem natürlichen Logarithmus derselben Zahl durch Multiplication mit dem Modul M_a:*

(6) . . . . $${}^a\!\log x = M_a\,.\,\log x.$$

Für die Briggi'schen Logarithmen gilt:

(7) . . . . $$M_{10} = 0{,}434\,294\,48\ldots$$

8. Differentiation der Exponentialfunction. Die Exponentialgrösse.

Setzt man y statt x in (3), Nr. 7, so folgt:

$$y\log a\,.\,d\,{}^a\!\log y = dy.$$

Schreibt man hier ${}^a\!\log y = x$ und also $y = a^x$, so ist:

$$d(a^x) = a^x\log a\,.\,dx.$$

2*

Lehrsatz: *Die Differentiation der Exponentialfunction* $y = a^x$ *ist geleistet durch:*

(1) . . $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a$ *oder* $d(a^x) = a^x \log a \,.\, dx.$

Speciell für die Function $y = e^x$ *folgt:*

(2) . . . . . $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ *oder* $d(e^x) = e^x\, dx.$

Erklärung und Lehrsatz: *Die dem natürlichen Logarithmus inverse Function* $y = e^x$ *nennt man kurz die „Exponentialgrösse". Sie hat die Eigenschaft, mit ihrer Ableitung identisch zu sein.*

9. Differentiation der trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$.

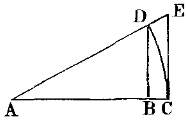
Vorbemerkung: In Fig. 16 sei $\widehat{CD} = s$ ein zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegener Kreisbogen vom Radius 1, so dass

$$\overline{AB} = \cos s, \quad \overline{BD} = \sin s, \quad \overline{CE} = tg\, s$$

zutrifft. Die Inhalte des Dreieckes ABD, des Kreisausschnittes ACD und des Dreieckes ACE liefern:

$$\sin s \,.\, \cos s < s < tg\, s$$

Fig. 16.



oder, da $\sin s > 0$ ist,

$$\cos s < \frac{s}{\sin s} < \frac{1}{\cos s}.$$

Wird s unendlich klein, so nähern sich die beiden äusseren Seiten dieser Ungleichung übereinstimmend der Grenze 1:

Lehrsatz: *Der Quotient* $\frac{\sin s}{s}$ *nähert sich für unendlich kleines* s *der Grenze 1:*

(1) . . . . $\lim_{s=0} \left(\frac{\sin s}{s}\right) = 1.$

Zur Differentiation von $y = \sin x$ knüpfe man an:

$$\sin x_1 - \sin x = 2 \cos \frac{x_1 + x}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x}{2},$$

woraus sich ergiebt:

(2) . . . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.$

Setzt man nun $\Delta x = 2s$, so ist für $\lim. \Delta x = 0$:

$$\lim_{s=0}(x+s)=x, \quad \lim_{s=0}\left(\frac{\sin s}{s}\right)=1;$$

aus (2) folgt also für $\frac{dy}{dx}$ der Werth $\cos x$.

Für die Differentiation von $y=\cos x$ gründe man auf:

$$\cos x_1 - \cos x = -2\sin\frac{x_1+x}{2}\cdot\sin\frac{x_1-x}{2}$$

eine analoge Rechnung.

Lehrsatz: *Die Ableitungen bezw. Differentiale der trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$ sind:*

$$(3) \quad \dots \quad \frac{d\sin x}{dx}=\cos x, \qquad d\sin x=\cos x\,dx,$$

$$(4) \quad \dots \quad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x, \qquad d\cos x=-\sin x\,dx.$$

10. Differentiation der cyklometrischen Functionen $\operatorname{arc}\sin x$ und $\operatorname{arc}\cos x$.

Setzt man in die Formel (3) der vorigen Nummer y statt x und versteht unter y einen innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ gewählten Werth, so ist $\cos y>0$ und

$$d\sin y=\sqrt{1-\sin^2 y}\,dy$$

mit *positiv* genommener Wurzel.

Setzt man nun $\sin y=x$ und also $y=\operatorname{arc}\sin x$, so ist y der *Hauptwerth* von $\operatorname{arc}\sin x$ (vergl. S. 9); man hat für denselben:

$$dx=\sqrt{1-x^2}\,.\,d\operatorname{arc}\sin x.$$

Der Hauptwerth von $\operatorname{arc}\cos x$ sei durch (1), S. 9, gegeben, unter $\operatorname{arc}\sin x$ der Hauptwerth letzterer Function verstanden; dann berechnet sich die Ableitung von $\operatorname{arc}\cos x$ aus der von $\operatorname{arc}\sin x$ vermöge der Regeln in Nr. 5 und 6 S. 17 u. f.

Lehrsatz: *Die Ableitungen bezw. Differentiale der cyklometrischen Functionen $\operatorname{arc}\sin x$ und $\operatorname{arc}\cos x$ sind, wenn die Hauptwerthe dieser Functionen gemeint sind:*

$$(1) \quad \frac{d\operatorname{arc}\sin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\operatorname{arc}\sin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(2) \quad \frac{d\operatorname{arc}\cos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\operatorname{arc}\cos x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Gleichungen (2) kann man auch aus (4) Nr. 9 ableiten.

11. Differentiation des Productes und des Quotienten zweier Functionen.

I. Ist $y = f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, handelt es sich also um Differentiation des Productes zweier Functionen, so knüpfe man an:

$$f(x_1) - f(x) = \varphi(x_1)\,\psi(x_1) - \varphi(x_1)\,\psi(x) + \varphi(x_1)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x_1) \cdot \frac{\psi(x_1) - \psi(x)}{x_1 - x} + \psi(x) \cdot \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}.$$

Für *lim.* $x_1 = x$ ergiebt sich hieraus:

$$(1) \quad . \quad . \quad \frac{d\,[\varphi(x)\,\psi(x)]}{d\,x} = \varphi(x)\,\frac{d\,\psi(x)}{d\,x} + \psi(x)\,\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x},$$

wofür man auch abkürzend schreibt:

$$(2) \quad \frac{d\,[\varphi(x)\,\psi(x)]}{d\,x} = \varphi(x)\,\psi'(x) + \psi(x)\,\varphi'(x) \text{ oder } d\,(\varphi\,\psi) = \varphi . d\psi + \psi . d\varphi.$$

Lehrsatz: *Das Product zweier Functionen wird differentiirt, indem man jede Function mit der Ableitung der anderen multiplicirt und beide Producte addirt.*

II. Zur Differentiation von $y = f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ knüpfe man an:

$$\varphi(x) = \psi(x) f(x) \quad \text{und also} \quad \varphi'(x) = \psi(x) f'(x) + f(x)\,\psi'(x).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(3) \; f'(x) = \frac{d\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]}{d\,x} = \frac{\varphi'(x) - f(x)\,\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi \,.\, d\,\varphi - \varphi \,.\, d\,\psi}{\psi^2}.$$

Lehrsatz: *Der Quotient zweier Functionen wird differentiirt, indem man das Product des Nenners mit der Ableitung des Zählers um das Product des Zählers mit der Ableitung des Nenners vermindert und die Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt.*

12. Differentiation der rationalen Functionen, speciell der Function x^{-n}.

Der zuletzt angegebene Lehrsatz im Verein mit der Regel der Differentiation einer ganzen rationalen Function (S. 18) leistet die *Differentiation der rationalen Functionen.*

Hat man im Besonderen mit ganzer positiver Zahl n:

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

so ist $\varphi = 1$, $\varphi' = 0$, $\psi = x^n$, $\psi' = n\,x^{n-1}$, und also liefert (3) Nr. 11:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = -n x^{-n-1}.$$

Lehrsatz: *Bedeutet m eine ganze positive oder negative Zahl oder Null, so gilt stets:*

(1) . . $$\frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1} \quad \text{oder} \quad d(x^m) = m x^{m-1} dx.$$

13. Differentiation der trigonometrischen Functionen $tg\, x$ und $ctg\, x$.

Da $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist, so leistet Formel (3), S. 22, im Verein mit (3) und (4), S. 21, die Differentiation von $tg\, x$ und $ctg\, x$.

Für $f(x) = tg\, x$ trage man in (3), S. 22, ein:

$$\varphi(x) = \sin x, \quad \varphi'(x) = \cos x, \quad \psi(x) = \cos x, \quad \psi'(x) = -\sin x.$$

Es ergiebt sich:

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$$

Indem man analog für $ctg\, x$ verfährt, ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die Ableitungen und Differentiale der trigonometrischen Functionen $tg\, x$ und $ctg\, x$ sind:*

(1) $$\frac{d\, tg\, x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x, \qquad d\, tg\, x = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

(2) $$\frac{d\, ctg\, x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + ctg^2 x), \quad d\, ctg\, x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

14. Differentiation der cyklometrischen Functionen $arc\, tg\, x$ und $arc\, ctg\, x$.

Da bei den Functionen $arc\, tg\, x$ und $arc\, ctg\, x$ beliebige Werthe von den entsprechenden Hauptwerthen nur um *additive Constante* $\nu\pi$ abweichen, so werden die Ableitungen nach Nr. 5 für die Hauptwerthe $arc\, tg\, x$ und $arc\, ctg\, x$ dieselben sein, wie für irgend welche Werthe dieser unendlich vieldeutigen Functionen.

Schreibt man in Formel (1) voriger Nummer y statt x, so ist

$$d\, tg\, y = (1 + tg^2 y)\, dy.$$

Setzt man nun $tg\, y = x$ und also $y = arc\, tg\, x$, so folgt

$$dx = (1 + x^2) \,.\, d\, arc\, tg\, x.$$

Zur Erledigung von $arc\, ctg\, x$ knüpfe man entsprechend an Formel (2), Nr. 13, oder an (1), S. 9.

Lehrsatz: *Die abgeleiteten Functionen und Differentiale der cyklometrischen Functionen $arc\, tg\, x$ und $arc\, ctg\, x$ sind:*

(1) $$\frac{d\, arc\, tg\, x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad d\, arc\, tg\, x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

(2) $$\frac{d\,arc\,ctg\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad d\,arc\,ctg\,x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

15. Differentiation zusammengesetzter Functionen.

Ist $y = F(x) = f[\varphi(x)]$ eine zusammengesetzte Function (cf. S. 9) oder, wie man auch sagt, *die Function f einer Function* φ, so führe man zur Differentiation von $F(x)$ die *„Hülfsvariabele"* $z = \varphi(x)$ ein und setze also:

$$y = f(z), \qquad z = \varphi(x).$$

Vermöge (2), Nr. 3, S. 17, folgt hieraus:

$$dy = f'(z)\,dz, \qquad dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Hier ist dz das zu dx gehörende Differential, und dy gehört zu dz und dadurch mittelbar zu dx.

Durch Elimination von dz folgt:

(1) . . . . $$dy = f'(z)\,\varphi'(x)\,dx,$$

sowie hieraus weiter:

(2) . . . . $$\frac{dy}{dx} = f'(z)\,.\,\varphi'(x) = f'[\varphi(x)]\,.\,\varphi'(x).$$

Lehrsatz: *Ist $y = f[\varphi(x)]$ eine zusammengesetzte Function, so führe man zur Differentiation derselben die Hülfsvariabele $z = \varphi(x)$ ein, differentiire $y = f(z)$ zunächst als Function von z oder, wie man kurz sagt, nach z und multiplicire das Ergebniss mit der Ableitung von $z = \varphi(x)$ nach x.*

Zusatz: *Ist $\varphi(x)$ selber eine zusammengesetzte Function, so hat man zur Berechnung des letzten Factors $\varphi'(x)$ in (2) die gleiche Regel ein zweites Mal, sowie eventuell noch öfter anzuwenden.*

Ist z. B. $y = \sin ax$, so setze man $ax = z$; nach (2) ist:

$$\frac{dy}{dx} = \cos z \cdot \frac{d(ax)}{dx} = a \cos ax.$$

Für $y = \log \sin x$ setze man $z = \sin x$ und hat:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\,x.$$

16. Differentiation der Function $y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

In $y = \sqrt[q]{x^p}$ sei q eine positive ganze Zahl und p eine positive oder negative ganze Zahl oder 0.

Da y^q und x^p identisch sind, so gilt das Gleiche von den Ableitungen dieser beiden Functionen nach x:

$$q\,y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,x^{p-1}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Lehrsatz: *Ist m irgend ein positiver oder negativer rationaler Bruch, die sämmtlichen ganzen Zahlen eingeschlossen, so gilt:*

$$\frac{d(x^m)}{dx} = m x^{m-1} \quad oder \quad d(x^m) = m x^{m-1} dx.$$

Die Regeln in Nr. 15 und 16 leisten die *Differentiation der irrationalen Functionen.*

17. Die logarithmische Differentiation.

Erklärung: *Bei manchen Functionen $y = f(x)$ ist es zur Berechnung der Ableitung zweckmässig, zunächst von $f(x)$ den natürlichen Logarithmus $\log f(x)$ zu bilden und diesen nach x zu differentiiren. Man nennt diese Operation die „logarithmische Differentiation" von $f(x)$.*

Hierzu zwei Beispiele:

I. Man setze $y = f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$ an [1]).

Zur Berechnung von $f'(x)$ differentiire man

$$\log y = \log f(x) = \psi(x) \,.\, \log \varphi(x)$$

auf Grund der S. 22 und S. 24 angegebenen Regeln. Es folgt:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \psi(x) \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \psi'(x) \cdot \log \varphi(x),$$

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = y \,.\, \left[\psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \psi'(x) \log \varphi(x)\right].$$

II. Es sei $f(x)$ als Product von n Functionen gegeben:

$$f(x) = \varphi_1(x) \,.\, \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x).$$

Zur Berechnung von $f'(x)$ differentiire man:

$$\log f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \log \varphi_\nu(x).$$

Auf Grund von Nr. 15 folgt:

$$(2) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi'_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)}, \qquad f'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x)}{\varphi_\nu(x)} \cdot \varphi'_\nu(x).$$

Lehrsatz: *Ein Product von n Functionen wird differentiirt, indem man die Ableitung jeder Function mit den übrigen ($n - 1$) Functionen multiplicirt und die n Producte addirt.*

---

[1]) Um die Bildung dieser Function zu verstehen, schreibe man:

$$y = e^{\log y} = e^{\psi(x) \,.\, \log \varphi(x)}.$$

Bei der Herstellung von y als Function von x kommen also neben $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ noch der natürliche Logarithmus und die Exponentialgrösse zur Geltung.

18. Bemerkung über die Art der abgeleiteten Functionen.

Die Vergleichung der Art einer Function $f(x)$ mit der Art der zugehörigen Ableitung $f'(x)$ liefert folgenden

Lehrsatz: *Die Ableitung einer elementaren algebraischen Function ist stets wieder algebraisch und im Speciellen diejenige einer rationalen Function wieder rational. Der Logarithmus und die cyklometrischen Functionen haben algebraische Ableitungen. Dagegen haben die Exponentialfunctionen und die trigonometrischen Functionen wiederum Exponentialfunctionen bezw. trigonometrische Functionen zu Ableitungen.*

III. Capitel.

Die Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung einer Function $f(x)$.

---

1. Die Ableitungen höherer Ordnung einer Function $f(x)$.

Da die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ wieder eine Function von x ist, so können wir auch $f'(x)$ differentiiren. Man schreibt:

$$(1)\quad \frac{d\,f'(x)}{d\,x}=f''(x),\ \frac{d\,f''(x)}{d\,x}=f'''(x)\ \ldots,\ \frac{d\,f^{(n-1)}(x)}{d\,x}=f^{(n)}(x),\ \ldots$$

Erklärung: *Die durch den in (1) angedeuteten successiven Differentiationsprocess zu gewinnende Function $f^{(n)}(x)$ heisst die derivirte (abgeleitete) Function oder Ableitung der n^{ten} Ordnung oder auch kurz „die n^{te} Ableitung“ von $f(x)$.*

Ableitung schlechthin ist somit dasselbe wie erste Ableitung.

Beispiel I. Ist $f(x)=x^n$ mit positivem ganzen n, so ist:

$$(2)\quad \begin{cases} f'(x)=n\,x^{n-1},\ f''(x)=n\,(n-1)\,x^{n-2},\ \ldots, \\ f^{(n-1)}(x)=n\,(n-1)\ldots 2\,.\,x,\ f^{(n)}(x)=n\,(n-1)\ldots 2\,.\,1, \\ f^{(n+1)}(x)=0,\ \ldots \end{cases}$$

Durch Ausdehnung dieses Ansatzes auf die ganzen rationalen Functionen auf Grund der Regeln von S. 17 u. f. entspringt folgender

Lehrsatz: *Die n^{te} Ableitung einer ganzen rationalen Function n^{ten} Grades ist constant, alle höheren Ableitungen verschwinden.*

Beispiel II. Für $y = f(x) = \sin x$ folgt nach S. 21:

$$(3) \qquad f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x, \ldots$$

Lehrsatz: *Bei der Function $f(x) = \sin x$ (und ebenso bei $\cos x$) ist für jedes n die $(n+4)^{te}$ Ableitung gleich der n^{ten} und die $(n+2)^{te}$ Ableitung unterscheidet sich von der n^{ten} nur durch das Vorzeichen.*

Beispiel III. Für $f(x) = e^{kx}$ hat man:

$$(4) \qquad f'(x) = k e^{kx},\ f''(x) = k^2 e^{kx}, \ldots,\ f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}, \ldots$$

2. Die n^{te} Ableitung des Productes zweier Functionen.

Ist $f(x) = \varphi(x) . \psi(x)$, so findet man durch wiederholte Anwendung der Formel (2) S. 22, wenn der Kürze halber die Argumente x fortgelassen werden:

$$\begin{aligned} f' &= \varphi\psi' + \varphi'\psi, \\ f'' &= \varphi\psi'' + 2\varphi'\psi' + \varphi''\psi, \\ f''' &= \varphi\psi''' + 3\varphi'\psi'' + 3\varphi''\psi' + \varphi'''\psi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hier ist die Summe der Ordnungen der Ableitungen in jedem rechts stehenden Gliede gleich der Ordnung der links stehenden Ableitung, und überdies haben das Anfangs- und Endglied rechter Hand jeweils den Factor 1.

Diese Angaben bleiben auch bei Fortsetzung des Differentiationsprocesses gültig, so dass man hat:

$$(1) \qquad f^{(n)} = \varphi\psi^{(n)} + \binom{n}{1}\varphi'\psi^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{k}\varphi^{(k)}\psi^{(n-k)} + \cdots + \varphi^{(n)}\psi.$$

Hierin ist $\binom{n}{k}$ eine symbolische Schreibweise für diejenige ganze Zahl, welche angiebt, wie oft das Glied $\varphi^{(k)}\psi^{(n-k)}$ mit $1 < k < n$ im entwickelten Ausdrucke von $f^{(n)}$ auftritt.

Zur Bestimmung der Anzahl $\binom{n}{k}$ setze man im Speciellen:

$$\varphi(x) = x^k,\quad \psi(x) = x^{n-k},\quad f(x) = x^n.$$

Dann gilt zufolge (2) S. 26:

$$\begin{aligned} &\psi^{(n)} = 0,\quad \psi^{(n-1)} = 0, \ldots,\quad \psi^{(n-k+1)} = 0, \\ &\qquad\qquad \psi^{(n-k)} = (n-k)(n-k-1)\ldots 2.1, \\ &\varphi^{(n)} = 0,\quad \varphi^{(n-1)} = 0, \ldots,\quad \varphi^{(k+1)} = 0, \\ &\qquad\qquad \varphi^{(k)} = k(k-1)\ldots 2.1 \end{aligned}$$

und $f^{(n)} = n(n-1)\ldots 2.1$. Aus (1) ergiebt sich somit:

$$1.2.3\ldots n = \binom{n}{k}.1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots(n-k).$$

Lehrsatz: *Die n^{te} Ableitung des Productes zweier Functionen $f(x) = \varphi(x) \,.\, \psi(x)$ stellt sich in den Ableitungen der einzelnen Factoren durch die Formel (1) dar, wobei die Anzahl $\binom{n}{k}$ durch:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k}$$

gegeben ist. Der hiermit gewonnene Ansatz zur Berechnung von $f^{(n)}(x)$ heisst „die Leibniz'sche Regel".

3. Beweis des binomischen Lehrsatzes.

Man setze in die Formel (1), Nr. 2 folgende Werthe ein:

$$\varphi(x) = e^{bx}, \quad \psi(x) = e^{ax}, \quad f(x) = e^{(a+b)x}.$$

Für diese Functionen folgt aus (4), S. 27:

$$\varphi^{(k)} = b^k \,.\, e^{bx}, \quad \psi^{(n-k)} = a^{n-k} \,.\, e^{ax}, \quad f^{(n)} = (a+b)^n \,.\, e^{(a+b)x}.$$

Nach Eintragung in (1), Nr. 2 und Forthebung von $f(x)$ folgt:

$$(1) \quad (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n.$$

Erklärung: *Diese Formel bringt den „binomischen Lehrsatz" zum Ausdruck. Die in (2), Nr. 2 dargestellte Zahl $\binom{n}{k}$ heisst dieserhalb „der k^{te} Binomialcoëfficient der n^{ten} Potenz".*

Durch directe Rechnung zeigt man:

$$(2) \quad . \quad . \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

Formeln, die auch noch für $k = 0$ und $k = n$ gelten, wenn man, der Gleichung (1) entsprechend, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ setzt.

4. Die Differenzenquotienten höherer Ordnung von $f(x)$.

Erklärung: *Sieht man den Differenzenquotienten von $y = f(x)$:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bei constantem Δx als Function von x an und bildet von dieser Function aufs Neue den Differenzenquotienten für die gleiche Aenderung Δx von x, so erhält man den Differenzenquotienten 2^{ter} Ordnung oder kurz den 2^{ten} Differenzenquotienten von $f(x)$. Entsprechend gelangt man zum 3^{ten}, allgemein zum „n^{ten} Differenzenquotienten" von $y = f(x)$.

Als zweiter Differenzenquotient berechnet sich:

$$(1)\qquad \frac{1}{\varDelta x}\left[\frac{f(x+2\varDelta x)-f(x+\varDelta x)}{\varDelta x}-\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}\right]$$
$$=\frac{f(x+2\varDelta x)-2f(x+\varDelta x)+f(x)}{\varDelta x^2},$$

wobei abkürzend $\varDelta x^2$ für $(\varDelta x)^2$ geschrieben ist.

Lehrsatz: *Der n^{ten} Differenzenquotienten von $f(x)$ ist:*

$$(2)\qquad \frac{1}{\varDelta x^n}\left\{f(x+n\varDelta x)-\binom{n}{1}f(x+[n-1]\varDelta x)\right.$$
$$\left.\mp\binom{n}{2}f(x+[n-2]\varDelta x)-\cdots+(-1)^n f(x)\right\}.$$

Man zeigt diesen Satz durch den Schluss der „vollständigen Induction". Ist er für n richtig, so zeigt die directe Berechnung des $(n+1)^{ten}$ Differenzenquotienten aus dem n^{ten} vermöge (2), Nr. 3, dass der Satz auch noch für $(n+1)$ gilt. Da er nun für $n=2$ in (1) bewiesen ist, so gilt er allgemein.

Der Zähler des Ausdrucks (2) heisst *Differenz n^{ter} Ordnung* oder *n^{te} Differenz* von $y=f(x)$, und wird durch $\varDelta^n y$ oder $\varDelta^n f(x)$ bezeichnet.

Lehrsatz: *Der n^{te} Differenzenquotient einer Function $y=f(x)$ stellt sich als Quotient der n^{ten} Differenz der Function und der n^{ten} Potenz der Differenz $\varDelta x$ des Argumentes dar.*

5. Die Differentialquotienten und Differentiale höherer Ordnung von $y=f(x)$.

Erklärung: *Soll sich $\varDelta x$ als stetige Variabele der Grenze 0 nähern, ohne mit 0 identisch zu werden, so schreiben wir (wie S. 16) dx statt $\varDelta x$ und nennen dx das Differential von x. Entsprechend ersetzt man die Schreibweise $\varDelta^n y$ des zugehörigen Werthes der n^{ten} Differenz durch $d^n y=d^n f(x)$ und nennt dieselbe „das Differential n^{ter} Ordnung" oder „das n^{te} Differential" der Function.*

An Stelle der Benennung „Grenze des n^{ten} Differentialquotienten" $\lim.\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)$ ist man übereingekommen, gerade wie bei $n=1$, kurz „n^{ter} Differentialquotient" zu sagen und zu schreiben.

Unter Gebrauch dieser Sprechweise gilt der

Lehrsatz: *Der n^{te} Differentialquotient von $y=f(x)$ liefert die n^{te} Ableitung von $f(x)$:*

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}=f^{(n)}(x)\quad \textit{oder ausführlich}\quad \lim_{\varDelta x=0}\left(\frac{\varDelta^n y}{\varDelta x^n}\right)=f^{(n)}(x).$$

Zum Beweise dieser Behauptung benutzt man folgenden aus der später abzuleitenden Taylor'schen Reihe entspringenden Satz:

Ist die Function $F(x)$ sammt ihrer Ableitung $F'(x)$ im Intervall von x bis $(x + \varDelta x)$ eindeutig und stetig, so gilt die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{F(x+\varDelta x) - F(x)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta F(x)}{\varDelta x} = F'(x + \vartheta \cdot \varDelta x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

wo ϑ eine von der Function F, dem Argument x und der Differenz $\varDelta x$ abhängende Zahl des Intervalles $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist.

Die Voraussetzungen über $F(x)$ sind bei den elementaren Functionen stets erfüllbar, falls man solche Werthe der Argumente meidet, bei denen Unstetigkeiten der Functionen eintreten.

Die verschiedenen Zahlen ϑ der folgenden Rechnung sollten stets dem Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehören.

Man trage nun in (2) ein:

$$(3) \qquad F(x) = \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}, \quad F'(x) = \frac{f'(x+\varDelta x) - f'(x)}{\varDelta x}$$

und erhält dadurch:

$$\frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x^2} = \frac{f'(x + \vartheta \cdot \varDelta x + \varDelta x) - f'(x + \vartheta \cdot \varDelta x)}{\varDelta x}.$$

Die rechte Seite gestalte man vermöge (2) um, indem man unter $F(x)$ die Function $f'(x + \vartheta \cdot \varDelta x)$ versteht:

$$(4) \qquad \frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x^2} = f''(x + \vartheta \cdot \varDelta x + \vartheta' \cdot \varDelta x) = f''(x + 2\,\vartheta_1 \cdot \varDelta x),$$

wobei $\vartheta + \vartheta' = 2\,\vartheta_1$ gesetzt ist.

Für $lim. \varDelta x = 0$ folgt aus (4) Formel (1) für $n = 2$.

Bildet man Formel (4) für $F(x)$ anstatt $f(x)$, und setzt demnächst für $F(x)$ den Ausdruck (3), so folgt entsprechend:

$$\frac{\varDelta^3 f(x)}{\varDelta x^3} = f'''(x + 3\,\vartheta_2 \cdot \varDelta x)$$

und damit der Beweis von (1) für $n = 3$ u. s. w.

6. Die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung.

Es sei ε eine „unendlich kleine Grösse", d. h. eine Grösse, welche sich als stetige Variabele der Null nähert, ohne mit Null identisch zu werden.

Erklärung: *Hängt die Grösse ζ derart von ε ab, dass $\frac{\zeta}{\varepsilon^n}$ für $lim. \varepsilon = 0$ endlich und von 0 verschieden ist, so sagt man, ζ werde im Vergleich zu ε unendlich klein von der n^{ten} Ordnung, oder man spricht auch, so oft es keine Zweideutigkeit hervorruft, schlechthin von einer „unendlich kleinen Grösse der n^{ten} Ordnung".*

Da $f^{(n)}(x)$ für gewöhnlich nur für vereinzelte Werthe von x gleich 0 oder ∞ wird, so folgt aus (1), S. 29, der

Lehrsatz: *Das n^{te} Differential $d^n y = d^n f(x)$ einer Function $y = f(x)$ ist im Allgemeinen unendlich klein von der n^{ten} Ordnung, sofern dx unendlich klein von der ersten Ordnung wird.*

Ist ζ unendlich klein von der n^{ten} und η unendlich klein von der m^{ten} Ordnung, und ist $m > n$ und also $l = m - n > 0$, so ist:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\eta}{\zeta}\right) = \lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{\eta}{\varepsilon^m}\cdot\frac{\varepsilon^n}{\zeta}\cdot\varepsilon^l\right) = 0.$$

Lässt man, gerade wie bei Differentialen, das Zeichen *lim.* in den Formeln fort, so ergiebt sich hieraus:

$$\frac{\zeta+\eta}{\zeta} = 1 \text{ oder, was dasselbe besagen soll, } \zeta + \eta = \zeta.$$

Dies Ergebniss drückt man aus durch den

Lehrsatz: *Eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung ist im Vergleich zu einer solchen niederer Ordnung selber unendlich klein und kann neben jener vernachlässigt werden.*

Eine zwar ungenaue, aber nützliche Veranschaulichung dieser Verhältnisse gewinnt man dadurch, dass man die unendlich kleine Grösse ε durch eine constante und sehr kleine Zahl ersetzt:

I. Ist $\varepsilon = \left(\frac{1}{10}\right)^3$, so ist ε^2 als tausendster Theil von ε im Vergleich zu ε sehr klein.

II. Theilt man den Würfel von der Cubikeinheit, wie Fig. 17 andeutet, durch äquidistante Horizontalebenen in n Scheiben der Höhen

Fig. 17.

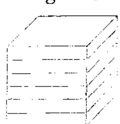


Fig. 18.

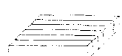
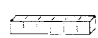


Fig. 19.



$\varepsilon = \frac{1}{n}$, so wird der Cubikinhalt der einzelnen Scheibe ε und ist somit bei grossem n sehr klein.

Theilt man die einzelne Scheibe, wie Fig. 18 zeigt, durch n äquidistante Verticalebenen in n Prismen, so ist der Cubikinhalt des einzelnen Prismas ε^2 und offenbar im Vergleich zum Volumen der Scheibe selber sehr klein.

Theilt man endlich das Prisma in n congruente Würfel (vergl. Fig. 19), so wird der Cubikinhalt eines einzelnen Würfels ε^3 wiederum gegenüber dem des Prismas sehr kein.

IV. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function $f(x)$.

1. Satz über das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$.

Unter $y = f(x)$ ist auch im Laufe der nächsten zwei Capitel irgend eine „elementare" Function verstanden.

Erklärung: *Eine Function* $y = f(x)$ *heisst mit* x *„gleichändrig" oder „ungleichändrig", je nachdem sie mit stetig wachsendem* x *gleichfalls wächst oder abnimmt.*

Es ist z. B. die Function $y = x^2 - 2$ für alle positiven Werthe des Argumentes mit x gleichändrig, für alle negativen Werthe mit x ungleichändrig. Die Function $\sin x$ ist zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$ mit x gleichändrig, im Intervall von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ ungleichändrig u. s. w.

Lehrsatz: *Eine Function* $f(x)$ *ist für alle diejenigen Werthe von* x *mit* x *gleichändrig (ungleichändrig), für welche die Ableitung positiven (negativen) Zahlwerth hat.*

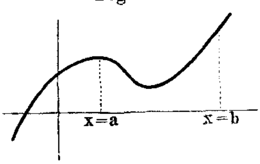
Der Beweis entspringt aus der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten (vergl. Fig. 14, S. 16); daselbst ist α spitz oder stumpf, je nachdem für den Punkt P die Function $f(x)$ mit x gleichändrig ist oder nicht.

2. Die Maxima oder Minima einer Function $f(x)$.

Erklärung: *Hört* $f(x)$, *während* x *als stetig wachsende Grösse den Werth* $x = a$ *passirt, auf, mit* x *gleichändrig zu sein, um demnächst mit* x *ungleichändrig zu werden, so wird* $f(x)$ *für* $x = a$ *zu einem „Maximum". Hört* $f(x)$, *während* x *als stetig wachsende Grösse den Werth* $x = a$ *passirt, auf, mit* x *ungleichändrig zu sein, um demnächst mit* x *gleichändrig zu werden, so wird* $f(x)$ *für* $x = a$ *zu einem „Minimum".*

Fig. 20 erläutert den Fall des Maximums bei $x = a$.

Fig. 20.



Zufolge der Erklärung werden hier die Werthe der Function nur für solche Argumente x mit einander verglichen, welche in der nächsten Nachbarschaft oder, wie man sagt, in der „*Umgebung*" von $x = a$ liegen. Es darf somit in Fig. 20 sehr wohl $f(b)$ grösser als der Maximalwerth $f(a)$ sein.

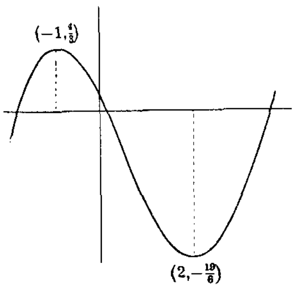
Lehrsatz: *Eine Function $f(x)$ wird stets und nur dann für $x = a$ zu einem Maximum (Minimum), falls ihre Ableitung $f'(x)$, während x als stetig wachsende Grösse den Werth $x = a$ passirt, von positiven zu negativen (negativen zu positiven) Zahlwerthen übergeht.*

Der Beweis ergiebt sich sofort aus Nr. 1.

Der Vorzeichenwechsel der Zahlwerthe von $f'(x)$ kann auf drei Arten vor sich gehen:

I. *Ist $f'(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig, so kann $f'(x)$ nur vermöge des „stetigen Durchganges durch den Werth 0" bei $x = a$ von positiven zu negativen Werthen oder umgekehrt gelangen.*

Fig. 21.



In diesem Falle gewinnt die zu $y = f(x)$ gehörende Curve im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ eine parallel zur x-Axe verlaufende Tangente. Als Beispiel gelte die implicite durch:

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - 6y + 1 = 0$$

definirte Function $y = f(x)$. Die Ableitung:

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

geht stetig von positiven zu negativen Werthen, wenn x als wachsende Grösse den Werth $x = -1$ passirt; $f'(x)$ geht von negativen zu positiven Werthen, wenn x ebenso den Werth $x = 2$ durchläuft. Somit ist $f(-1) = {}^4/_3$ ein Maximum und $f(2) = -{}^{19}/_6$ ein Minimum; der in Fig. 21 gezeichnete Verlauf der Curve der vorliegenden Function bringt dies zur Anschauung.

II. *Zweitens kann $f'(x)$ vermöge des „Durchganges durch ∞" von positiven zu negativen Werthen oder umgekehrt gelangen.*

Diesen Fall versinnliche das Beispiel:

$$f(x) = 5 - 3\sqrt[5]{(x-2)^2}, \quad f'(x) = -\frac{6}{5\sqrt[5]{(x-2)^3}},$$

wo $f'(x)$ bei $x = 2$ durch ∞ von positiven zu negativen Werthen übergeht. Es ist somit $f(2) = 5$ ein Maximum der Function (vergl. Fig. 22).

Fig. 22.

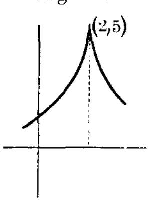
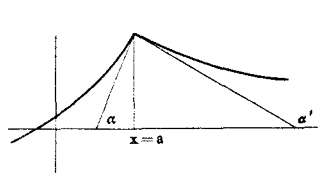


Fig. 23.



Bei Annäherung an den Werth $x = a$ von der einen oder anderen Seite wird der S. 16 mit α bezeichnete Winkel sich der Grenze $\frac{\pi}{2}$ annähern.

Hieraus ergiebt sich, dass die zu $y = f(x)$ gehörende Curve im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ einen sogen. *Rückkehrpunkt* (eine *Spitze*) mit einer *zur y-Axe parallelen* Tangente besitzt.

III. *Endlich kann $f'(x)$ unstetig „durch endlichen Sprung" von positiven zu negativen Werthen oder umgekehrt gelangen.*

Dieser Fall, den Fig. 23 (a. v. S.) erläutert, gewinnt bei den elementaren Functionen keine Geltung.

3. Gebrauch der höheren Ableitungen zur Bestimmung der Maxima und Minima von $f(x)$.

Es gelte jetzt die specielle Annahme, dass $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ *stetig* und (was nicht immer besonders genannt wird) eindeutig seien.

Soll $f(x)$ für $x = a$ zu einem Maximum (Minimum) werden, so muss zufolge I., Nr. 2 die Gleichung $f'(a) = 0$ gelten und $f'(x)$ muss in der ganzen Umgebung von $x = a$ ungleichändrig (gleichändrig) mit x sein.

Die letztere Forderung wird nach Nr. 1 jedenfalls dann befriedigt sein, wenn $f''(x)$ in der ganzen Umgebung von $x = a$ negativ (positiv) ist.

Ist aber $f''(a) < 0$ (bezw. > 0), so wird wegen der Stetigkeit von $f''(x)$ die Ungleichung $f''(x) < 0$ (bezw. > 0) in der nächsten Umgebung von $x = a$ überall gelten.

Lehrsatz: *Sind $f(x), f'(x), f''(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig und verschwindet $f'(x)$ für $x = a$, während $f''(a) < 0$ (bezw. > 0) ist, so wird $f(x)$ für $x = a$ zu einem Maximum (Minimum).*

Weitere Untersuchung erfordert der Fall, dass auch $f''(a) = 0$ ist. Es sei sogleich:

(1) $\quad f'(a) = 0,\; f''(a) = 0, \ldots,\; f^{(n-1)}(a) = 0,\; f^{(n)}(a) \gtrless 0,$

d. h. alle Ableitungen bis zur n^{ten} exclusive sollen für $x = a$ verschwinden.

Ist z. B. $f^{(n)}(a) < 0$, so zeigt der letzte Lehrsatz, dass $f^{(n-2)}(a) = 0$ ein Maximum von $f^{(n-2)}(x)$ ist, und dass somit $f^{(n-2)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ nicht positiv ist.

Dies zeigt, dass $f^{(n-3)}(x)$ in der ganzen Umgebung von $x = a$ mit x ungleichändrig ist, und dass somit $f^{(n-4)}(a) = 0$ ein Maximum von $f^{(n-4)}(x)$ ist.

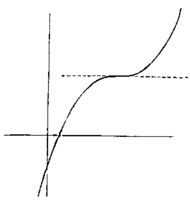
Durch Fortsetzung des Schlussverfahrens und Ausdehnung auf den Fall $f^{(n)}(a) > 0$ ergiebt sich der

Lehrsatz: *Sind $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig und verschwinden die $(n - 1)$ ersten Ableitungen für $x = a$, während $f^{(n)}(a) \gtrless 0$ ist, so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch Minimum, wenn n eine ungerade Zahl ist. Ist hingegen n*

gerade, so wird $f(a)$ zu einem Maximum (Minimum) von $f(x)$, wenn $f^{(n)}(a) < 0$ (> 0) ist.

Die Tangente der Curve $y = f(x)$ im Punkte $x = a$, $y = f(a)$ ist wegen $f'(a) = 0$ parallel zur x-Axe. Ist aber n ungerade, so bleibt die Function $f(x)$, nachdem x den Werth a durchlaufen hat, mit x gleichhändrig (ungleichändrig), wie sie es vorher war. Die Curve $y = f(x)$ hat bei $x = a$, $y = f(a)$ einen sogen. „Wendepunkt“ mit einer zur x-Axe parallelen „Wendetangente“ (vergl. Fig. 24).

Fig. 24.



V. Capitel.

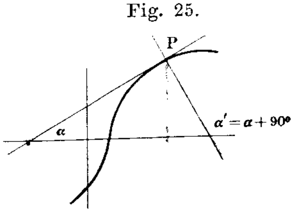
Betrachtung des Verlaufes ebener Curven.

1. Die Tangenten und Normalen einer ebenen Curve.

In der Ebene seien rechtwinklige Coordinaten x, y zu Grunde gelegt, und es sei eine Curve gegeben, deren Gleichung in die Gestalt $y = f(x)$ gesetzt sei.

Die Curve werde kurz C genannt; und $f(x)$ sei eine elementare eindeutige oder mehrdeutige Function.

Fig. 25.



Erklärung: *Sind P und P_1 zwei Punkte der Curve C, so bezeichnet man die Grenzlage, welcher die durch P und P_1 hindurchlaufende Gerade zustrebt, wenn P_1 dem Punkte P auf C ohne Ende oder unendlich nahe kommt, als „Tangente“ der Curve C im Punkte P.*

Die Tangente giebt in der Umgebung von P den Verlauf der Curve C „in erster Annäherung“ an.

Erklärung: *Eine im Punkte P die Tangente und also die Curve senkrecht schneidende Gerade heisst „Normale“ von C im Punkte P.*

Um die Gleichungen für Tangente und Normale aufzustellen, seien ξ, η die Coordinaten der Punkte auf einer dieser Geraden, während x und $y = f(x)$ die Coordinaten von P sind.

Als „Richtungscoëfficienten" für Tangente und Normale folgen aus S. 16, sowie aus Fig. 25 (a. v. S.) die Werthe:

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x), \qquad tg\,\alpha' = -\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{f'(x)}.$$

Lehrsatz: *Die Gleichung der Tangente von C im Punkte P der Coordinaten x, $y = f(x)$ ist:*

$$(1) \quad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \quad oder \quad \eta - y = f'(x)\,(\xi - x).$$

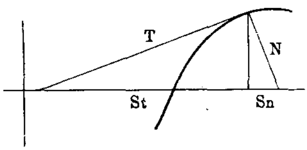
Die Gleichung der Normalen von C im Punkte P ist:

$$(2) \quad (\xi - x) + \frac{dy}{dx}(\eta - y) = 0 \quad oder \quad (\xi - x) + f'(x)\,(\eta - y) = 0.$$

2. Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Curve C für einen Punkt P.

Erklärung: *Die auf der Tangente und Normale durch den Berührungspunkt und die x-Axe eingegrenzten Strecken heissen „Tangente und Normale im engeren Sinne" und werden durch T und N bezeichnet.*

Fig. 26.



Hat es keine Zweideutigkeit zur Folge, so nennt man T und N auch wohl schlechthin „Tangente" und „Normale".

Die Projectionen der Strecken T und N auf die x-Axe heissen „Subtangente" und „Subnormale" und werden durch St und Sn bezeichnet.

Fig. 26 bringt diese Verhältnisse für den Fall zur Darstellung, dass bei P die Ordinate y positiv und $f(x)$ mit x gleichändrig ist.

Durch Discussion der in Fig. 26 auftretenden Dreiecke folgt der

Lehrsatz: *Für die zum Punkte P von C gehörenden Strecken St, Sn, T und N gelten die Gleichungen:*

$$(1) \qquad St = y\,\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f'(x)}, \qquad Sn = y\,\frac{dy}{dx} = y f'(x),$$

$$(2) \quad . \quad . \quad \begin{cases} T = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{f'(x)}\right)^2}, \\ N = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \end{cases}$$

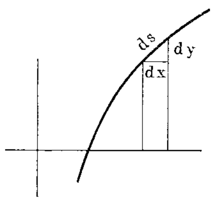
Diese Gleichungen bleiben auch in den übrigen, durch Fig. 26 nicht einbegriffenen Fällen bestehen; nur muss man vorkommenden Falles die rechten Seiten im Zeichen wechseln, damit für T, N, St, Sn *positive* Zahlwerthe entspringen.

3. Bogendifferential der Curve C.

Sind P und P_1 zwei einander nahe gelegene Punkte der Abscissen x und x_1 auf C, so bezeichnen wir die von irgend einem Ausgangspunkte auf C bis P und P_1 gemessene Bogenlänge von C durch s bezw. s_1.

Setzt man $x_1 - x = \Delta x$, $s_1 - s = \Delta s$, so ist Δs der dem Zuwachs Δx entsprechende Zuwachs des Bogens s.

Fig. 27.



Erklärung: *Kommt P_1 dem Punkte P ohne Ende nahe, so setzt man dx und ds für Δx und Δs und nennt ds das dem Differential dx entsprechende „Bogendifferential" oder „Bogenelement" der Curve C.*

Da C in der Umgebung von P keine Einknickung erfährt, so kann man, falls P_1 dem Punkte P sehr nahe liegt, das zwischen P und P_1 verlaufende Stück von C ohne merklichen Fehler als gerade ansehen [1]).

Dann zeigt Fig. 27 folgenden

Lehrsatz: *Das Bogendifferential ds von C ist gegeben durch:*

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{oder} \quad ds = \pm\, dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem s mit x gleichändrig ist oder nicht.

Mit Hülfe des Bogendifferentials schreiben sich die Gleichungen (2) Nr. 2:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad T = \pm\, y \frac{ds}{dy}, \qquad N = \pm\, y \frac{ds}{dx}.$$

4. Beispiele zur Berechnung der Tangenten, Normalen u. s. w.

I. Die in Fig. 28 (a. f. S.) dargestellte *Parabel* hat die Gleichung:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad y^2 = 2px \quad \text{oder} \quad y = \pm\sqrt{2px}.$$

Der in Fig. 28 gewählte Punkt P hat positives y, so dass gilt:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

Die Formeln der vorletzten Nummer geben somit für St und Sn:

$$(3) \quad \ldots \quad St = \frac{y^2}{p} = 2x, \qquad Sn = y \cdot \frac{p}{y} = p.$$

Lehrsatz: *Bei der Parabel ist die Subtangente des einzelnen Punktes P gleich der doppelten Abscisse von P, die Subnormale aber ist constant gleich p.*

II. Erklärung: *Lässt man einen Kreis auf einer Geraden rollen, so beschreibt ein einzelner Punkt des Kreises eine sogen. „Cykloide".*

Der Kreis habe den Radius a; die Gerade, auf welcher der Kreis rollt, werde die x-Axe; der Berührungspunkt der x-Axe und des Kreises

[1]) Genauer spricht man die Sachlage dahin aus, dass der Quotient des Bogens ds und der zugehörigen Sehne für $lim.\, ds = 0$ die Grenze 1 hat.

in der Anfangslage sei der Nullpunkt O. Indem der Kreis etwa nach rechts rollt, beschreibt der anfängliche Berührungspunkt die in Fig. 29 angedeutete Cykloide.

Bei der in Fig. 29 festgehaltenen Lage des Kreises hat der die Cykloide beschreibende Punkt die Stelle A erreicht. Um das Centrum C

Fig. 28.

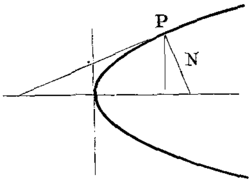
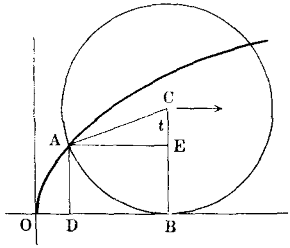


Fig. 29.



hat sich der Kreis bis dahin um den Winkel $\sphericalangle\, ACB = t$, den sogen. „*Wälzungswinkel*", gedreht.

Für die Coordinaten $\overline{OD} = x$, $\overline{AD} = y$ des Punktes A der Cykloide liefert die Discussion der Fig. 29:

$$(4) \quad \ldots \quad x = a\,(t - \sin t), \qquad y = a\,(1 - \cos t).$$

Durch Elimination von t findet man als Gleichung zwischen x und y:

$$(5) \quad \ldots \quad x = -\sqrt{2\,ay - y^2} + a \,.\, \arccos\left(\frac{a - y}{a}\right).$$

Lehrsatz: *In (5) ist die Gleichung der Cykloide gegeben. Insofern hier die transcendente Function arc cos vorkommt, heisst die Cykloide eine transcendente Curve.*

Für manche Zwecke ist es einfacher, die Cykloide durch das Gleichungspaar (4) darzustellen, wobei die Coordinaten x, y des einzelnen Cykloidenpunktes als Functionen der unabhängigen Variabelen t erscheinen.

Aus (4) ergiebt sich leicht:

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = a\,(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{dy}{dx} = ctg\left(\frac{t}{2}\right), \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Die Formeln in Nr. 2 ergeben sonach:

$$(7) \quad \ldots \quad \begin{cases} T = 2\,a\,\dfrac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}, & N = 2\,a \sin\left(\frac{t}{2}\right), \\[2ex] St = 2\,a\,\dfrac{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}, & Sn = a \sin t. \end{cases}$$

Zufolge der letzten Formel ist die Subnormale in Fig. 29 durch die Strecke $\overline{DB}$ gegeben.

Lehrsatz: *Bei der Cykloide läuft die Normale des einzelnen Punktes A durch den Berührungspunkt B des zugehörigen Kreises mit der x-Axe hindurch.*

5. Concavität und Convexität der Curven.

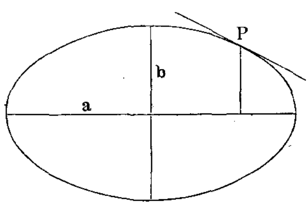
Man ziehe im Punkte P der Curve C die Tangente und nehme an, dass dieselbe nicht parallel zur y-Axe ist.

Erklärung: *Liegt die Curve C in der nächsten Umgebung von P unterhalb*[1]) *der Tangente, so heisst die Curve bei P „nach unten concav" (nach oben convex); liegt indess C in der nächsten Umgebung von P oberhalb der Tangente, so heisst die Curve bei P „nach unten convex" (nach oben concav).*

Der Fall der Concavität nach unten liegt in Fig. 14 (S. 16) sowohl rechts wie links vor.

Aus der im Anschluss an jene Figur dargelegten geometrischen Bedeutung von $f'(x)$ ergiebt sich, dass für diesen Fall bei P die Function $f'(x)$ mit x ungleichändrig und also $f''(x)$ *negativ* ist.

Fig. 30.



Entsprechend findet man, dass im Falle der Convexität nach unten $f''(x)$ in der Umgebung von P *positiv* ist.

Lehrsatz: *Ist die Curve C bei P nach unten concav (convex), so hat die zweite Ableitung $f''(x)$ in der Umgebung von P negative (positive) Zahlwerthe und umgekehrt.*

Für die in Fig. 30 dargestellte Ellipse ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn der Punkt P oberhalb der x-Axe liegt. Für diesen Fall ist:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{ab}{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3}.$$

Die Ellipse ist in der Umgebung von P nach unten concav, was in Uebereinstimmung mit dem negativen Zeichen des Zahlwerthes von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ bei P ist.

In die vorstehende Betrachtung ist der Fall, dass die Tangente in P mit der y-Axe parallel ist, nicht einbegriffen. Für diesen Fall

1) Die Richtung „nach unten" soll in der xy-Ebene diejenige der negativen y-Axe sein.

gehe man nach S. 3 zur Betrachtung der zu $f(x)$ inversen Function über, um die concave Seite der Curve zu bestimmen.

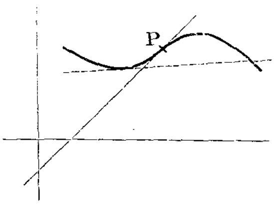
6. Wende- oder Inflexionspunkte einer Curve.

Auch weiterhin sei die Tangente in P nicht parallel zur y-Axe.

Erklärung: *Ist die Curve C auf der einen Seite des Punktes P nach unten concav und auf der anderen Seite nach unten convex, so heisst der Punkt P ein Wende- oder Inflexionspunkt der Curve und die Tangente in P heisst Wende- oder Inflexionstangente.*

Dieses Vorkommniss ist in Fig. 31 erläutert.

Fig. 31.



Von einer gewöhnlichen Tangente, als der Verbindungsgeraden zweier einander unendlich nahe rückenden Punkte von C, sagt man, sie habe mit C *zwei „consecutive" Punkte* gemein.

Die stetige Ueberführung einer gewöhnlichen Tangente in eine Wendetangente (vergl. Fig. 31) zeigt den

Lehrsatz: *Eine Wendetangente hat mit der Curve drei consecutive Punkte gemein.*

Die Ergebnisse von Nr. 5 liefern weiter den

Lehrsatz: *Passirt x als stetige Variabele den Werth der Abscisse des Wendepunktes P, so geht $f''(x)$ von negativen zu positiven Zahlwerthen oder umgekehrt über.*

Die Rechnungen in Nr. 7 zeigen, dass $f''(x)$ bei diesem Uebergange *den Werth Null* passirt.

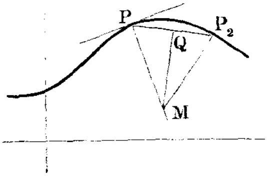
Für $y = \sin x$ ist $f''(x) = -\sin x$; sämmtliche Schnittpunkte der x-Axe und der Sinuslinie sind Wendepunkte (vergl. Fig. 9, S. 7).

Einen etwaigen Wendepunkt mit einer zur y-Axe parallelen Tangente mache man wieder durch Uebergang zu der mit $f(x)$ inversen Function der Rechnung zugänglich.

7. Die Krümmungskreise einer Curve.

Der Kreis durch die drei Punkte P, P_1, P_2 der Curve C heisse K. Rückt P_1 dem Punkte P unendlich nahe, so werden K und C im Punkte P gemeinsame Tangente gewinnen und also *einander berühren.*

Fig. 32.



Rückt überdies auch noch P_2 dem Punkte P unendlich nahe, so geht hierbei K in eine Grenzlage über, welche man als *den „Krümmungskreis" der Curve C im Punkte P* bezeichnet.

Lehrsatz: *Der Krümmungskreis von C im Punkte P hat mit der Curve C bei P drei consecutive Punkte gemein.*

Unter allen die Curve C im Punkte P berührenden Kreisen schmiegt sich der Krümmungskreis der Curve am engsten an; er ist dieserhalb geeignet, ein „Maass für die Krümmung" der Curve C bei P abzugeben.

Erklärung: *Der Mittelpunkt des Krümmungskreises heisst Krümmungscentrum, der Radius desselben Krümmungsradius der Curve C an der Stelle P.*

Das Krümmungscentrum liegt auf der zu P gehörenden Normale von C.

Sind P_1 und P einander bereits unendlich nahe, während P_2 noch endlich entfernt ist, so findet man den Mittelpunkt M von K durch die in Fig. 32 angedeutete Construction, wobei $\overline{MQ}$ das Loth auf der Mitte von $\overline{PP_2}$ ist.

Rückt jetzt auch P_2 dem Punkte P ohne Ende nahe, so wird $\overline{QM}$ zu einer mit $\overline{PM}$ „consecutiven" Normale.

Lehrsatz: *Das Krümmungscentrum ist die Grenzlage des Schnittpunktes der zu P gehörenden Normale mit einer zweiten Normale, deren Fusspunkt dem Punkte P ohne Ende nahe kommt:*

Sind x, y die Coordinaten von P, ferner $x + \Delta x, y + \Delta y$ diejenigen eines P nahe gelegenen Punktes P' und endlich ξ, η diejenigen des Schnittpunktes der zu P und P' gehörenden Normalen, so gilt nach (2), S. 36 (oben):

$$(\xi - x) + f'(x)\,(\eta - y) = 0,$$
$$(\xi - x - \Delta x) + f'(x + \Delta x)\,(\eta - y - \Delta y) = 0.$$

Durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten folgt:

$$1 - (\eta - y) \cdot \frac{f'(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f'(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Für *lim.* $\Delta x = 0$ ergiebt die Fortsetzung der Rechnung den

Lehrsatz: *Die Coordinaten ξ, η des zum Punkte P gehörenden Krümmungscentrums, sowie der Krümmungsradius ϱ stellen sich vermöge der Coordinaten x, y von P und der Curvengleichung $y = f(x)$, wie folgt, dar:*

$$(1) \quad \xi = x - \frac{f'(x) + [f'(x)]^3}{f''(x)}, \quad \eta = y + \frac{1 + [f'(x)]^2}{f''(x)}.$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho = \pm \frac{\{1 + [f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Die letzte Formel berechnet sich auf Grund des Umstandes, dass ϱ gleich der Entfernung des Krümmungscentrums vom Punkte P ist. Das Vorzeichen ist rechts so zu wählen, dass ϱ positiven Werth bekommt.

Ist P Wendepunkt, so stellt die Wendetangente den Krümmungskreis dar. Dies erfordert, falls $f'(x)$ für P endlich ist, $f''(x) = 0$ in Uebereinstimmung mit den Angaben von Nr. 6.

Setzt man im Falle der *Ellipse* in (1) und (2) die in (1), S. 39 gegebenen Werthe von $f'(x)$, $f''(x)$ ein, so ergiebt die Entwickelung:

$$(3) \quad . \quad . \quad \xi = \frac{e^2 x^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{e^2 y^3}{b^4}, \quad \varrho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4},$$

unter $e^2 = a^2 - b^2$ das Quadrat der Excentricität verstanden.

Für die *Cykloide* liefern die dritte und erste Formel (6), S. 38:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\, ctg\left(\frac{t}{2}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4\,a\,sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Die Entwickelung der Formeln (1) und (2) ergiebt damit:

$$(5) \quad \xi = a\,(t + sin\,t), \quad \eta = -a\,(1 - cos\,t), \quad \varrho = 4\,a\,sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

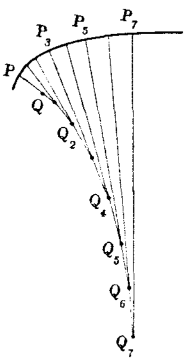
Durch Vergleich mit der zweiten Formel (7), S. 38, entspringt der Lehrsatz: *Für den einzelnen Punkt der Cykloide ist der Krümmungsradius ϱ doppelt so gross, als die Normale N.*

In Fig. 28, S. 38, ist somit der zum Punkte A gehörende Krümmungshalbmesser die über B um sich selbst verlängerte Strecke $\overline{AB}$.

8. Die Evoluten und Evolventen.

Erklärung: *Der geometrische Ort aller zu einer Curve C gehörenden Krümmungscentra stellt eine neue Curve dar, welche man als Krümmungsmittelpunktscurve oder Evolute von C bezeichnet.*

Fig. 33.



In Fig. 33 sind für einige, einander nahe gelegene Punkte P, P_1, P_2, ... von C die Normalen errichtet und je zwei auf einander folgende unter ihnen in Q, Q_1, ... zum Durchschnitt gebracht. Diese Punktreihe giebt ein ungefähres Bild vom Verlauf der Evolute.

Speciell veranschaulicht Fig. 33 folgenden Lehrsatz: *Die Normale von C im Punkte P ist Tangente der Evolute in dem P entsprechenden Punkte Q.*

Es sind nämlich in (1), Nr. 7 die Coordinaten ξ, η von Q als Function von x gegeben. Hieraus folgt:

$$(1) \quad \frac{d\xi}{dx} = -f' \cdot \frac{3f'f''^2 - f''' - f'^2 f'''}{f''^2}, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{3f'f''^2 - f''' - f'^2 f'''}{f''^2},$$

wo der Kürze halber die Argumente x bei f', f'', f''' fortgelassen sind. Aus (1) folgt weiter:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d\xi}{dx} = -f'(x) \cdot \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Braucht man nun den Winkel α im Sinne von Fig. 14, S. 16, und nennt den entsprechenden Winkel bei der Evolute α', so folgt aus (2):

$$(3) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\alpha' = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{tg\,\alpha} \quad \text{und also} \quad \alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Des weiteren veranschauliche man sich an Fig. 33 den

Lehrsatz: *Das Bogendifferential $d\sigma$ der Evolute ist absolut genommen gleich dem entsprechenden (d. i. zu demselben dx gehörenden) Differential $d\varrho$ des Krümmungsradius.*

Aus (1) ergiebt sich nämlich:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = (1 + f'^2)\left(\frac{3f'f''^2 - f''' - f'^2 f'''}{f''^2}\right)^2,$$

und zu dem gleichen Ausdruck gelangt man von (2), Nr. 7, aus für $\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2$, so dass in der That $d\sigma = \pm\, d\varrho$ gilt.

Denkt man die Tangente $\overline{QP}$ der Evolute als gespannten Faden, so zeigt der letzte Lehrsatz, dass bei Auf- oder Abwickelung des Fadens auf der Evolute der Endpunkt P des Fadens die ursprüngliche Curve C beschreibt.

Erklärung: *Die Curve, welche durch irgend einen Punkt eines längs einer gegebenen Curve aufgewickelten und gespannten Fadens bei weiterer Auf- oder Abwickelung beschrieben wird, heisst eine Evolvente der gegebenen Curve.*

Da hierbei die Auswahl des beschreibenden Punktes auf dem Faden willkürlich ist, so hat *jede Curve unendlich viele Evolventen.*

Lehrsatz: *Das Verhältniss zwischen der ursprünglichen Curve C und ihrer Evolute kann man auch so aussprechen, dass C eine unter den Evolventen jener Evolute ist.*

9. Gleichung der Evolute und Beispiele.

Durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \xi = x - \frac{f' + f'^3}{f''} \qquad \text{und} \qquad \eta = f + \frac{1 + f'^2}{f''}$$

sind die Coordinaten ξ, η des einzelnen Punktes der Evolute in x dargestellt. Die Elimination von x liefert eine Gleichung $F(\xi, \eta) = 0$ für ξ und η, welche somit *die Gleichung der Evolute von C* ist.

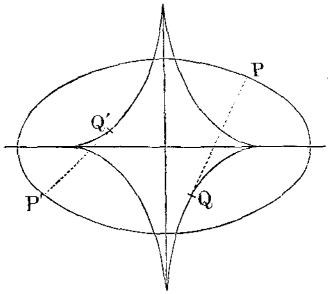
Für die *Ellipse* galten die Formeln (3), S. 42. Unter Heranziehung der Ellipsengleichung liefert die Elimination von x und y:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$$

als Gleichung der Evolute.

Die Gestalt dieser Evolute ist in Fig. 34 angegeben, wobei man sich die Zuordnung der Punkte P und Q deutlich machen wolle.

Fig. 34.



Die Scheitelpunkte der Ellipse sind Punkte grösster bezw. kleinster Krümmung; dem entspricht es, dass die ihnen zugehörigen Punkte der Evolute Rückkehrpunkte (Spitzen) sind. —

Die Evolute der *Cykloide* ist in Fig. 35 dargestellt; es gilt der Lehrsatz, *dass die Evolute der Cykloide selbst wieder eine Cykloide ist.*

Führt man nämlich das in Fig. 35 angedeutete Coordinatensystem X, Y vermöge:

$$X = \xi + a\pi, \quad Y = \eta + 2a$$

ein und setzt $T = t + \pi$, so nehmen die Gleichungen (5), S. 42, der Evolute der Cykloide die Gestalt an:

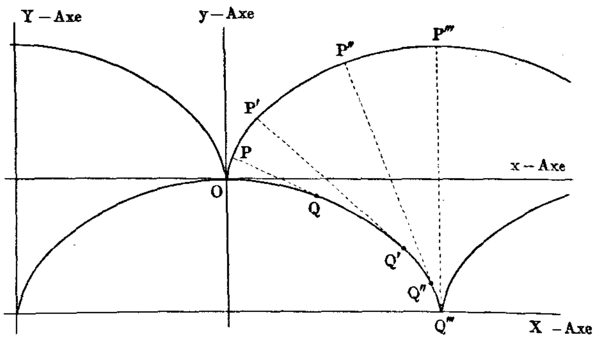
$$X = a\,(T - \sin T), \qquad Y = a\,(1 - \cos T).$$

Hierdurch ist eine mit der ursprünglichen congruente Cykloide dargestellt [vergl. (4), S. 38].

Wickelt man in Fig. 35 den Faden $\overline{Q'''P'''}$ nach links auf der Evolute auf, so gelangt man zum

Lehrsatz: *Die Bogenlänge eines einzelnen (zwischen zwei auf einander folgenden tiefsten Punkten gelegenen) Zweiges der Cykloide ist achtmal so gross, als der Radius a des rollenden Kreises.* —

Fig. 35.

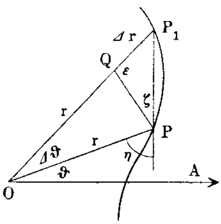


Aus Nr. 7 folgert man noch, dass einem Wendepunkte von C ein „unendlich ferner“ Punkt der Evolute zugehört, wobei die Normale von C im Wendepunkte „Asymptote“ der Evolute wird.

10. Einführung der Polarcoordinaten.

Ein Punkt O der Ebene sei als „*Pol*“ und ein von O auslaufender Strahl OA als „*Axe*“ eines Polarcoordinatensystems fixirt. Die Polarcoordinaten r, ϑ eines Punktes P der Ebene sind dann der „*Radius vector*“ $\overline{OP} = r$ und die „*Amplitude*“ $\vartheta = \sphericalangle AOP$ (vergl. Fig. 36).

Fig. 36.



Es sei eine beliebige Curve C vorgelegt, deren Gleichung etwa die Gestalt $r = f(\vartheta)$ habe.

In Fig. 36 sind auf C zwei Punkte P und P_1 der Coordinaten r, ϑ und $r + \Delta r$, $\vartheta + \Delta\vartheta$ fixirt, und es ist $\overline{OQ} = \overline{OP}$ gemacht, so dass man hat:

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{PQ} = 2\, r \sin\left(\dfrac{\Delta\vartheta}{2}\right), \quad \overline{P_1 Q} = \Delta r, \\ \sphericalangle\ OPQ = \sphericalangle\ OQP = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\Delta\vartheta}{2}. \end{cases}$$

Die Definition von ε, ζ und η entnehme man aus Fig. 36; es ist:

$$(2) \quad . \ . \ . \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\vartheta}{2}, \qquad \zeta = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\vartheta}{2} - \eta.$$

Durch Betrachtung des Dreiecks PQP_1 ergiebt sich vermöge (1) und (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \overline{PP_1}^2 = \Delta r^2 + 4\, r^2 \sin^2\left(\dfrac{\Delta\vartheta}{2}\right) + 4\, r\, \Delta\, r \sin^2\left(\dfrac{\Delta\vartheta}{2}\right), \\ \cos\left(\eta - \dfrac{\Delta\vartheta}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\Delta\vartheta}{2}\right) \cdot \dfrac{\Delta r}{\overline{PP_1}}. \end{cases}$$

Die Division der ersten Gleichung durch $\Delta\vartheta^2$ liefert:

$$(4) \quad \left(\frac{\overline{PP_1}}{\Delta\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{\Delta\vartheta}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\sin\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}{\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}\right)^2 + r\,.\,\Delta r \cdot \left(\frac{\sin\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}{\dfrac{\Delta\vartheta}{2}}\right)^2.$$

Der Quotient der Sehne $\overline{PP_1}$ und des zugehörigen Bogens Δs wird für $\lim.\ \Delta\vartheta = 0$ gleich ± 1; somit folgt aus (4):

$$(5) \quad \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2 \quad \text{oder} \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2,$$

während sich daraufhin aus (3) ergiebt:

$$(6) \quad \cos\eta = \frac{dr}{ds}, \quad tg^2\eta = \frac{1}{\cos^2\eta} - 1 = \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 - 1 = \left(\frac{r\,d\vartheta}{dr}\right)^2.$$

Lehrsatz: *In Polarcoordinaten drücken sich das Bogendifferential und die Function tg des Winkels η zwischen Radius vector und Tangente von C im Punkte P, wie folgt, aus:*

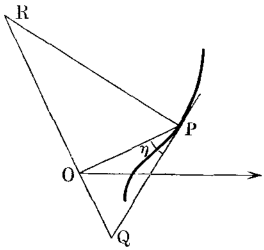
$$(7) \quad . \ . \ . \quad ds = \pm\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}, \qquad tg\,\eta = \frac{r\,d\vartheta}{dr}.$$

Das Vorzeichen der rechten Seite der letzten Formel ist richtig fixirt, da η spitz (stumpf) ist, wenn r mit ϑ gleichändrig (ungleichändrig) ist (vergl. Fig. 36).

11. Erklärung von Polartangente, Polarnormale u. s. w.

In Fig. 37 ist in O auf dem Radius vector $\overline{OP}$ des Punktes P die Gerade $\overline{QR}$ senkrecht gezogen; und es sind Tangente und Normale von C im Punkte P bis zu ihren Schnittpunkten Q und R mit jener Senkrechten gezogen.

Fig. 37.



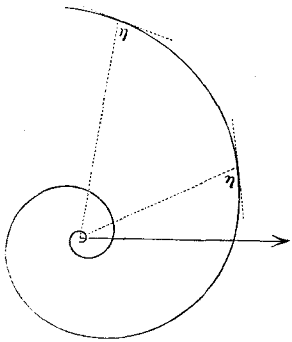
Erklärung: *Die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ heissen die zum Punkte P von C gehörende „Polartangente“ T und „Polarnormale“ N; entsprechend heissen die Strecken $\overline{OQ}$ und $\overline{OR}$ „Polarsubtangente“ St und „Polarsubnormale“ Sn.*

Durch Betrachtung der Dreiecke in Fig. 37 folgt der

Lehrsatz: *Für die Polartangente T u. s. w. gelten die Formeln:*

$$(1) \quad . \quad . \quad T = r\frac{ds}{dr}, \quad N = \frac{ds}{d\vartheta}, \quad St = \frac{r^2 d\vartheta}{dr}, \quad Sn = \frac{dr}{d\vartheta}.$$

Fig. 38.



Besonders geeignet sind die Polarcoordinaten zur Untersuchung der *Spiralen*.

Ein Beispiel liefere die durch:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r = e^{a\vartheta}$$

gegebene *logarithmische Spirale*, deren Verlauf Fig. 38 andeutet. Die logarithmische Spirale hat sowohl nach aussen wie auch in der Richtung auf den Pol O unendlich viele Windungen.

Aus (2) ergiebt sich:

$$(3) \quad \begin{cases} tg\,\eta = \frac{1}{a}, \quad T = r\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}, \\ N = r\sqrt{1+a^2}, \quad St = \frac{r}{a}, \quad Sn = ar. \end{cases}$$

Lehrsatz: *Für alle Punkte der logarithmischen Spirale hat der Winkel η den gleichen Werth; die Längen T und ebenso N, St und Sn sind für die verschiedenen Punkte der logarithmischen Spirale mit r proportional.*

VI. Capitel.

Grundlagen der Integralrechnung.

1. Begriff des unbestimmten Integrals.

Erklärung: *Die Fundamentalaufgabe der Integralrechnung lautet: Gegeben ist die Function $\varphi(x)$; man soll eine solche Function $f(x)$ angeben, deren Ableitung $f'(x)$ mit $\varphi(x)$ identisch ist.*

Die Auflösung dieser Aufgabe ist die zur Differentiation von $f(x)$ inverse Operation.

Von der gesuchten Function $f(x)$ ist unmittelbar das zu dx gehörende Differential $df(x) = \varphi(x)\,dx$ gegeben. Man kleidet demnach die Fundamentalaufgabe auch wohl in die

Erklärung: *Aus dem in der Gestalt $\varphi(x)\,dx$ gegebenen Differential $df(x)$ soll die Function $f(x)$ selbst hergestellt werden. Diesen Uebergang bezeichnet man als „Integration" des Differentials $df(x) = \varphi(x)\,dx$, und das Resultat dieser Operation, d. i. $f(x)$, heisst „Integral" des Differentials $df(x) = \varphi(x)\,dx$, oder kurz „Integral von $\varphi(x)\,dx$".*

Um durch eine Formel auszudrücken, dass die Integration von $\varphi(x)\,dx$ auf $f(x)$ führt, schreibt man:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x) = \int \varphi(x)\,dx.$$

Erklärung: *Man hat hiernach das Zeichen $\int$ als „Integral von" zu lesen; und die Formel (1) bringt nichts anderes zum Ausdruck, als dass das Differential $df(x) = \varphi(x)\,dx$ oder die Ableitung $f'(x) = \varphi(x)$ sei.*

Weiter unten wird gezeigt, *dass es für jedes mit einer elementaren Function $\varphi(x)$ gebildete Differential $\varphi(x)\,dx$ ein Integral $f(x)$ giebt.*

Ist neben $f(x)$ auch $g(x)$ ein Integral von $\varphi(x)\,dx$, so haben $f(x)$ und $g(x)$ gleiche Ableitungen; und also ist für die Function $F(x) = g(x) - f(x)$ die Ableitung $F'(x)$ beständig gleich 0.

Hieraus folgt, dass für die Function $y = F(x)$ der in Fig. 14 (S. 16) mit α bezeichnete Winkel beständig gleich 0 ist, und dass also die zu $y = F(x)$ gehörende Curve eine Parallele zur x-Axe ist.

Die Function $F(x)$ hat somit für alle x den gleichen Werth, sie ist eine Constante C. Es muss sich also $g(x)$ in der Gestalt $f(x) + C$ darstellen lassen.

Nun hat andererseits die Function $[f(x) + C]$ bei willkürlich gewähltem C dieselbe Ableitung wie $f(x)$; also folgt der

Lehrsatz: *Das Integral eines gegebenen Differentials $\varphi(x)\,dx$ ist nur bis auf eine willkürlich wählbare additive Constante C eindeutig bestimmt, d. h. mit $f(x)$ ist stets auch $f(x) + C$ Integral von $\varphi(x)\,dx$.*

C heisst die „*Integrationsconstante*"; bleibt der Werth von C unbestimmt, so spricht man von einem „*unbestimmten Integral*".

2. Unmittelbare Integration einiger Differentiale.

Soll ein gegebenes Differential $\varphi(x)\,dx$ integrirt werden, so ist man zunächst darauf angewiesen, in den Formeln der Differentialrechnung nach einer Function $f(x)$ zu suchen, für welche $f'(x) = \varphi(x)$ wird.

Indem man sogleich die einfachsten Differentialformeln

$$d f(x) = \varphi(x)\,dx \quad \text{in} \quad f(x) = \int \varphi(x)\,dx,$$

d. h. in die entsprechenden Integralformeln umschreibt, ergiebt sich folgendes erste Formelsystem:

(1) $$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad \left(\begin{array}{c}\text{für alle ganzen und gebrochenen}\\ \text{Zahlen } m\end{array}\right),$$

(2) $$\int \frac{dx}{x} = \log x,$$ (3) $$\int e^x\,dx = e^x,$$

(4) $$\int \cos x\,dx = \sin x,$$ (5) $$\int \sin x\,dx = -\cos x,$$

(6) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x,$$ (7) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x,$$

(8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x,$$ (9) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x.$$

Der Kürze halber sind hier überall die Integrationsconstanten C ausgelassen.

3. Zwei Hülfssätze zur Integration der Differentiale.

Gelten die beiden Formeln:

(1) . . . $d f(x) = f'(x)\,dx$ und $d g(x) = g'(x)\,dx$,

so liefert der erste Lehrsatz in Nr. 5, S. 17:

(2) . . . . $d\,[f(x) \pm g(x)] = [f'(x) \pm g'(x)]\,dx.$

Setzt man nun $f'(x) = \varphi(x)$, $g'(x) = \psi(x)$, so folgt aus (1):

(3) . . . $f(x) = \int \varphi(x)\,dx, \quad g(x) = \int \psi(x)\,dx,$

und die zu (2) gehörende Integralformel:

(4) . . . . $\int [\varphi(x) \pm \psi(x)]\, dx = f(x) \pm g(x)$

liefert vermöge (3):

(I) . . $\int [\varphi(x) \pm \psi(x)]\, dx = \int \varphi(x)\, dx \pm \int \psi(x)\, dx.$

Lehrsatz: *Eine Summe oder Differenz wird integrirt, indem man jedes Glied integrirt und die entspringenden Integrale addirt bezw. subtrahirt.*

Ist $f'(x) = \varphi(x)$, so liefert Formel (4), S. 18:

(5) . . . . $d\,[af(x)] = af'(x)\, dx = a\,\varphi(x)\, dx.$

Die zugehörige Integralformel:

(6) . . . . $\int a\,\varphi(x)\, dx = af(x) = a\int \varphi(x)\, dx$

liefert:

(II) . . . . . $\int a\,\varphi(x)\, dx = a\int \varphi(x)\, dx.$

Lehrsatz: *Ein constanter Factor des zu integrirenden Differentials darf vor das Integralzeichen gesetzt werden.*

Beispiele zu Nr. 2 und Nr. 3 sind:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)\, dx = C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$\int \left(2x^3 - \frac{7}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = C + {}^1\!/_2\, x^4 - 14\sqrt{x} + 3 \arcsin x.$$

Hier ist beide Male die Integrationsconstante zugefügt.

4. Integration durch Substitution einer neuen Variabelen.

Erklärung: *In vielen Fällen gelingt die Integration von $\varphi(x)\,dx$ durch Einführung einer Hülfsvariabelen z vermöge*

(1) . . . . . $x = \psi(z), \quad dx = \psi'(z)\, dz.$

Die „Substitution" von $\psi(z)$ für x liefert:

(2) . . $\int \varphi(x)\, dx = \int \varphi[\psi(z)]\,.\,\psi'(z)\, dz = \int \Phi(z)\, dz.$

Kann man das letzte Integral als Function $F(z)$ angeben, so liefert endlich die Wiedereinführung von x das gesuchte Integral:

(3) . . . $\int \varphi(x)\, dx = \int \Phi(z)\, dz = F(z) = f(x).$

Führt man z. B. in $\int \sin(a + bx)\, dx$ die Variabele z vermöge $a + bx = z$, $b\,dx = dz$ ein, so ergiebt sich:

(4) $$\int \sin(a + b x)\, d x = \frac{1}{b} \int \sin z\, d z = -\frac{\cos z}{b} = -\frac{\cos(a + b x)}{b}.$$

Bei den folgenden Beispielen ist immer die zur Berechnung des Integrals geeignete Substitution in Klammern angegeben:

(5) $$\int \frac{d x}{x + a} = \log\,(x + a), \qquad [x + a = z],$$

(6) $$\int \cos(5 + 7 x)\, d x = {}^1/_7 \sin(5 + 7 x), \qquad [5 + 7 x = z],$$

(7) $$\int e^{k x}\, d x = \frac{1}{k} \cdot e^{k x}, \qquad [k x = z],$$

(8) $$\int \frac{d x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\, arc\, tg\left(\frac{x}{a}\right), \qquad [x = a z],$$

(9) $$\int \frac{d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\, sin\left(\frac{x}{a}\right), \qquad [x = a z],$$

(10) $$\int \frac{x\, d x}{a^2 + x^2} = {}^1/_2 \log\,(a^2 + x^2), \qquad [a^2 + x^2 = z],$$

(11) $$\int tg\, x\, d x = -\log \cos x, \qquad [\cos x = z],$$

(12) $$\int \frac{d x}{\sin x} = \log tg\left(\frac{x}{2}\right), \qquad \left[tg\left(\frac{x}{2}\right) = z\right].$$

Die Herstellung der Formel (8) gründet sich auf:

$$\frac{d x}{\sin x} = \frac{d x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{d\, tg\left(\frac{x}{2}\right)}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5. Methode der partiellen Integration.

Aus Formel (2), S. 22 ergiebt sich:

(1) . . $$d\,[\varphi(x)\chi(x)] = \varphi(x)\chi'(x)\, d x + \varphi'(x)\chi(x)\, d x,$$

(2) . . $$\varphi(x)\chi(x) = \int \varphi(x) \frac{d\chi(x)}{d x}\, d x + \int \frac{d\varphi(x)}{d x} \chi(x)\, d x.$$

Schreibt man in (2):

$$\frac{d\chi(x)}{d x} = \psi(x) \quad \text{und also} \quad \chi(x) = \int \psi(x)\, d x,$$

so folgt:

(3) $$\int \varphi(x)\psi(x)\, d x = \varphi(x)\int \psi(x)\, d x - \int\left[\frac{d\varphi(x)}{d x}\int \psi(x)\, d x\right] d x.$$

Erklärung: *Die in dieser Formel enthaltene Regel zur Berechnung von* $\int \varphi(x)\psi(x)\, d x$ *heisst die Regel oder Methode der „partiellen Integration“.*

Digitale Bibliothek Braunschweig

Die partielle Integration verwendet man vielfach mit Vortheil bei der Integration gegebener Differentiale; Beispiele sind:

I. $$\int log\, x\, d\,x, \quad \varphi(x) = log\, x, \quad \psi(x) = 1,$$

$$\int log\, x\, d\,x = log\, x \int d\,x - \int \left[\frac{1}{x} \int d\,x\right] d\,x,$$

$$\int log\, x\, d\,x = x\, log\, x - x. \tag{4}$$

II. $$\int x\, sin\, x\, d\,x, \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x) = sin\, x,$$

$$\int x\, sin\, x\, d\,x = x \int sin\, x\, d\,x - \int \left[\int sin\, x\, d\,x\right] d\,x.$$

$$\int x\, sin\, x\, d\,x = -x\, cos\, x + sin\, x. \tag{5}$$

III. $$\int arc\,tg\, x\, d\,x, \quad \varphi(x) = arc\,tg\, x, \quad \psi(x) = 1,$$

$$\int arc\,tg\, x\, d\,x = arc\,tg\, x \int d\,x - \int \left[\frac{1}{1+x^2} \int d\,x\right] d\,x,$$

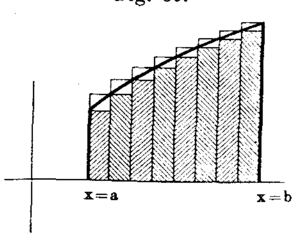
$$\int arc\,tg\, x\, d\,x = x\, arc\,tg\, x - {}^1/_2\, log\,(1+x^2). \tag{6}$$

6. Begriff des bestimmten Integrals.

Es sei $y = \varphi(x)$ eine elementare Function, welche in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ (unter a und b endliche Werthe verstanden) eindeutig und stetig ist.

Der Einfachheit halber sei zunächst angenommen, dass $\varphi(x)$ im ganzen Intervall positiv und mit x gleichändrig ist.

Fig. 39.



Das über dem Intervall gelegene Stück der Curve $y = \varphi(x)$, sowie die zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten sind in Fig. 39 durch starkes Ausziehen hervorgehoben. Es möge das von der Curve, den genannten beiden Ordinaten und der x-Axe begrenzte Flächenstück den Inhalt J haben.

Zur angenäherten Berechnung von J theilen wir die zwischen a und b gelegene Strecke der x-Axe in n Theile, die zwar nicht nothwendig, aber zweckmässig einander gleich gewählt werden. Der einzelne Theil habe die Länge $\varDelta x$, so dass man $b - a = n \cdot \varDelta x$ hat.

Indem auch noch in den $(n-1)$ Theilpunkten die Ordinaten $\varphi(a + \varDelta x)$, $\varphi(a + 2\varDelta x)$, . . ., $\varphi[a + (n-1)\varDelta x]$ errichtet werden, zerfällt die fragliche Fläche in n Streifen. Vom einzelnen Streifen schneide man ein (in der Fig. 39 schraffirtes) Reckteck ab, indem man durch den Endpunkt der linken Ordinate eine Parallele zur x-Axe zieht.

Der Gesammtinhalt J_n der n Rechtecke ist:

(1) $J_n = \varphi(a)\Delta x + \varphi(a+\Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi[a+(n-1)\Delta x]\Delta x.$

Führt man diese Operation wiederholt, und zwar für immer grössere n durch, so gilt:

(2) $$\lim_{n=\infty}\{\varphi(a)\Delta x + \varphi(a+\Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi[a+(n-1)\Delta x]\Delta x\} = J.$$

Zum Beweise vergrössere man den einzelnen der n Streifen (wie Fig. 39 andeutet) dadurch zu einem Rechteck, dass man durch den Endpunkt der rechten Ordinate eine Parallele zur x-Axe zieht. Der Gesammtinhalt J_n' der so entspringenden n Rechtecke ist:

(3) $J_n' = \varphi(a+\Delta x)\Delta x + \varphi(a+2\Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi(b)\Delta x.$

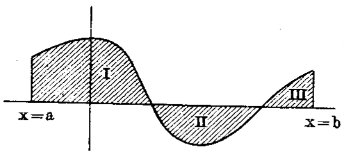
Aus Fig. 39, sowie aus (1) und (3) folgt:

(4) . . $J_n < J < J_n', \quad J_n' - J_n = [\varphi(b) - \varphi(a)]\Delta x;$

also ist $\lim_{n=\infty} J_n' = \lim_{n=\infty} J_n = J.$

Die Formel (2) gilt auch dann noch, wenn $\varphi(x)$ im Intervall nicht oder nicht stets mit x gleichändrig, sowie wenn $\varphi(x)$ nicht oder nicht immer positiv ist. Es ist nur nöthig zu verabreden, dass, falls die Curve ganz oder theilweise unterhalb der x-Axe verläuft, die Inhalte der hierselbst zwischen Curve und Axe gelegenen Flächenstücke *negativ* in Rechnung zu stellen sind. So ist J im Falle der Fig. 40 die Summe der Inhalte der Stücke I und III, vermindert um den Inhalt von II.

Fig. 40.



Für $\lim. n = \infty$ gewinnt die in (1) definirte Summe eine über alle Grenzen gross werdende Gliederanzahl und jedes Glied gewinnt die Rolle eines Differentials $\varphi(x)\,dx$. Deshalb setzt man:

(5) $$\lim_{n=\infty}\{\varphi(a)\Delta x + \varphi(a+\Delta x)\Delta x + \cdots + \varphi[a+(n-1)\Delta x]\Delta x\} = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

so dass hier das Zeichen $\int$ in einer zunächst neuen Bedeutung, nämlich als *Summenzeichen*, verwendet wird.

Erklärung: *Die in (1) erklärte Summe J_n bekommt für $\lim. n = \infty$ die Bedeutung einer Summe unendlich vieler Differentiale. Die so gedachte Summe wird mit der in (5) gegebenen typischen Bezeichnung $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ belegt. Dieser Ausdruck heisst ein „bestimmtes Integral“,* *und die unten und oben an das Summenzeichen gesetzten Grenzen a und b des der Betrachtung zu Grunde liegenden Intervalles heissen „die untere und die obere Grenze“ des Integrals. Das Intervall selbst heisse fortan „Integrationsintervall“.*

Die Berechtigung und Brauchbarkeit des Begriffes des bestimmten Integrals ist gewährleistet durch folgenden

Lehrsatz: *Das bestimmte Integral* $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *hat unter der Voraussetzung, dass die Grenzen a und b endlich sind, und dass $\varphi(x)$ im Integrationsintervall, die Grenzen eingeschlossen, eindeutig und stetig ist, den oben erklärten fest bestimmten Zahlwerth J.*

7. Zusammenhang zwischen den bestimmten und den unbestimmten Integralen.

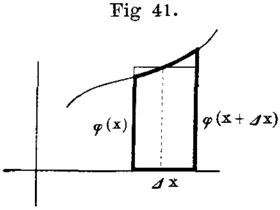
Die obere Grenze b des Integrals sei veränderlich und werde in diesem Sinne durch x statt durch b bezeichnet. Doch soll zunächst $x \geqq a$ sein, und im Intervall von a bis x müssen die wiederholt genannten Bedingungen für $\varphi(x)$ erfüllt sein.

Der Integralwerth J wird eine eindeutige stetige Function der oberen Grenze x, so dass zu setzen ist:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x).$$

Man bilde nun $F(x + \Delta x) - F(x)$, wo x für den Augenblick als fest gilt und Δx so klein gewählt sei, dass die Function $\varphi(x)$ im Intervall von x bis $(x + \Delta x)$ mit x entweder nur gleichändrig oder nur ungleichändrig ist.

Fig 41.



Unter diesen Umständen ist $F(x + \Delta x) - F(x)$, als Inhalt des in Fig. 41 stark umrandeten Bereiches, mit einem Rechteck der Grundlinie Δx und der in der Figur punktirt angedeuteten Höhe gleich. Letztere ist die Ordinate $\varphi(x + \vartheta \cdot \Delta x)$ für ein gewisses, dem Intervalle von x bis $(x + \Delta x)$ angehörendes Argument $(x + \vartheta \cdot \Delta x)$, wo also $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist:

$$(2) \quad . \; . \; \begin{cases} F(x + \Delta x) - F(x) = \varphi(x + \vartheta \cdot \Delta x)\,\Delta x, \\ \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \varphi(x + \vartheta \cdot \Delta x). \end{cases}$$

Für $\lim. \Delta x = 0$ folgt $F'(x) = \varphi(x)$; *es ist somit die in (1) erklärte Function $F(x)$ ein Integral des Differentials $\varphi(x)\,dx$ im Sinne von S. 47, und hiermit ist zugleich der Existenzbeweis der unbestimmten Integrale erbracht.*

Denkt man nun vorab das unbestimmte Integral $\int \varphi(x)\, dx = f(x)$ nach S. 47 ff. berechnet, so folgt aus vorstehender Entwickelung:

$$(3) \quad . \quad . \quad F(x) = f(x) + C \quad \text{und} \quad \int_a^x \varphi(x)\, dx = f(x) + C.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten C lassen wir x bis a abnehmen, so dass der Werth des bestimmten Integrals zu 0 wird:

$$0 = f(a) + C \quad \text{oder} \quad C = -f(a).$$

Durch Eintragung dieses Werthes in (3) und Wiedereinführung der Bezeichnung b für die obere Grenze folgt:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_a^b \varphi(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Lehrsatz: *Um das in (4) links stehende bestimmte Integral zu berechnen, integrire man zunächst unbestimmt $\int \varphi(x)\, dx = f(x)$; der Werth des bestimmten Integrals ist gleich der Differenz $f(b) - f(a)$ der Werthe von $f(x)$ für die Integralgrenzen.*

Eine zwar ungenaue, aber nützliche Auffassung der Formel (4) ist in folgender Ueberlegung enthalten.

Durchmisst man das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ in einer sehr grossen Anzahl sehr kleiner Schritte dx, und addirt man zum Anfangswerth $f(a)$ der Function $f(x) = \int \varphi(x)\, dx$ den jedem Schritte dx entsprechenden Zuwachs $df(x) = \varphi(x)\, dx$, so gelangt man schliesslich zum Endwerthe $f(b)$:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(a) + \int_a^b \varphi(x)\, dx = f(b).$$

Endlich ist zu bemerken, *dass die obere Grenze b auch kleiner als die untere a sein darf.* Man hat dann das Intervall auf der x-Axe von rechts nach links zu durchmessen und entsprechend negative dx bezw. in den Formeln der voraufgehenden Nummern negative Δx zu benutzen. Der Begriff des bestimmten Integrals, sowie die Formel (4) behalten hierbei durchaus ihre Gültigkeit.

8. Integration bis $x = \infty$ oder bis zu einer Unstetigkeitsstelle von $\varphi(x)$.

Ist $\varphi(x)$ für alle endlichen Werthe $x \geqq a$ eindeutig und stetig, so lasse man die obere Integralgrenze sich als stetige Variabele x dem Grenzwerthe ∞ annähern.

Erklärung: *Ergiebt sich bei diesem Grenzübergange ein bestimmter Grenzwerth:*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \lim_{x=+\infty} \int_a^x \varphi(x)\,dx = \lim_{x=+\infty} [f(x) - f(a)],$$

so definiren wir diesen Grenzwerth als den Werth des Integrals $\int_a^{+\infty}$ *mit der oberen Grenze* $+\infty$.

Entsprechende Festsetzungen finden statt, wenn die untere Integralgrenze gleich $+\infty$ wird, sowie wenn eine der Grenzen gleich $-\infty$ wird.

Das bestimmte Integral ist auch für den Fall noch nicht erklärt, dass $\varphi(x)$ für eine der Grenzen, etwa b, unstetig wird.

Erklärung: *Wird* $\varphi(x)$ *für* $x = b$ *unstetig durch Unendlichwerden, so soll:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_{x=b} \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

sein, falls bei dem angedeuteten Grenzübergange ein bestimmter Grenzwerth eintritt. Anderenfalls darf die Integration nicht bis $x = b$ *ausgedehnt werden.*

9. Lehrsätze über bestimmte Integrale.

Lehrsatz: *Aus dem Begriffe des bestimmten Integrals oder aus Formel (4), S. 54 ergeben sich die in folgenden Formeln enthaltenen Regeln:*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_b^a \varphi(x)\,dx = -\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_a^a \varphi(x)\,dx = 0,$$

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad \int_a^c \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^c \varphi(x)\,dx. -$$

Es seien die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig, und $\psi(x)$ sei daselbst nirgends negativ und nicht stets Null. Der grösste Werth von $\varphi(x)$ im Intervall sei M, der kleinste m. Dann gilt, dx als positiv vorausgesetzt:

$$m\,\psi(x)\,dx \leqq \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \leqq M\,\psi(x)\,dx$$

für das ganze Intervall; und also folgt weiter:

$$m\int_a^b \psi(x)\,dx \leqq \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \leqq M\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Setzt man somit zur Abkürzung:

$$(4)\quad \ldots \frac{\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx}{\int_a^b \psi(x)\,dx} = Q, \quad \text{so ist} \quad m \leqq Q \leqq M.$$

Da nun die *stetige* Function $\varphi(x)$ für einen bestimmten Werth x des Intervalles $= M$ und für einen gewissen anderen Werth $= m$ wird, so lässt sich zwischen jenen beiden Werthen x und also im Intervall ein Werth $x = c$ angeben, für welchen $\varphi(x)$ den zwischen M und m gelegenen Werth Q annimmt. Die Substitution $Q = \varphi(c)$ in die Gleichung (4) liefert den

Mittelwerthsatz: *Sind im Intervall $a \leqq x \leqq b$ die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig, und ist $\psi(x)$ daselbst nirgends negativ und nicht überall gleich Null, so lässt sich im Intervall ein Werth $x = c$ angeben, für den die Gleichung gilt:*

$$(5)\quad \ldots \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(c)\int_a^b \psi(x)\,dx, \quad a \leqq c \leqq b.$$

10. Quadratur ebener Curven.

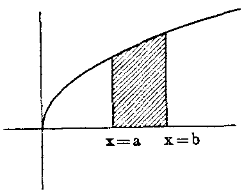
Aus den Betrachtungen von S. 51 ff. entspringt folgender

Lehrsatz: *Ist eine ebene Curve C gegeben, welche für jede dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ angehörende Abscisse x eine und nur eine Ordinate $y = \varphi(x)$ aufweist, so ist der Inhalt J der von der Curve, der Abscissenaxe und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Ordinaten eingeschlossenen Gesammtfläche:*

$$(1)\quad \ldots\ldots J = \int_a^b \varphi(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Die Maasszahlen von Flächentheilen *unterhalb* der x-Axe kommen hierbei *negativ* in Rechnung (vergl. Fig. 40, S. 52).

Fig. 42.



Die in (1) geleistete Inhaltsbestimmung heisst „*Quadratur der Curve C*“.

Erstes Beispiel. Es soll das in Fig. 42 schraffirte, nach oben hin durch die Parabel $y^2 = 2px$ begrenzte Flächenstück berechnet werden.

Hier ist $y = +\sqrt{2px}$, und also folgt aus (1):

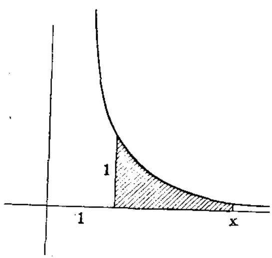
$$J = \int_a^b y\,dx = \int_a^b \sqrt{2px}\,dx.$$

Die unbestimmte Integration liefert das Resultat:

$$\int \sqrt{2px}\,dx = {}^2/_3\, x \sqrt{2px},$$

und also gewinnt man für J den Ausdruck:

Fig. 43.



$$(2) \quad J = {}^2/_3 \left(b\sqrt{2pb} - a\sqrt{2pa}\right),$$

welcher einer interessanten geometrischen Deutung fähig ist.

Zweites Beispiel. Es soll die Quadratur der durch $x^2 y = 1$ gegebenen und in Fig. 43 dargestellten Curve zwischen den Grenzen 1 und $x > 1$ geleistet werden. Der Ansatz (1) liefert hier:

$$(3) \quad J = \int_1^x y\,dx = \int_1^x \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{x},$$

so dass in diesem Falle die Integration bis $x = +\infty$ ausgedehnt werden kann: J nähert sich dabei der Grenze 1.

11. Rectification ebener Curven.

Betreffs der Curve C sollen die Voraussetzungen von Nr. 10 auch hier gelten.

Sieht man die *Bogenlänge* von C, gemessen von einem fest gewählten Anfangspunkt bis zum Punkte der Coordinaten x und $y = \varphi(x)$, als Functionen von x an, so ist nach S. 37:

$$(1) \quad . \quad . \quad ds = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \pm \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Nimmt man an, dass die Bogenlänge im Intervall $a \leqq x \leqq b$ mit x gleichändrig ist, so gilt in (1) das obere Zeichen.

Denkt man den über dem Intervall gelegenen Bogen von C in unendlich viele Differentiale ds zerlegt, so ist umgekehrt die Summe der letzteren gleich jenem Bogen.

Lehrsatz: *Die Länge s der Curve C zwischen den Punkten der Coordinaten a, $\varphi(a)$ und b, $\varphi(b)$ ist gegeben durch das bestimmte Integral:*

$$(2) \qquad s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Die Berechnung der Bogenlänge heisst „*Rectification der Curve C*“.

Beispiel. Im Falle der *Cykloide* benutzt man an Stelle von x zweckmässig den Wälzungswinkel t als unabhängige Variabele. Die Länge s eines Zweiges der Cykloide wird dann:

$$s = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt,$$

wie man mit Hülfe der Formeln von S. 37 und 38 feststellt.

Ersetzt man $\sqrt{1 - \cos t}$ durch $\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, so folgt weiter:

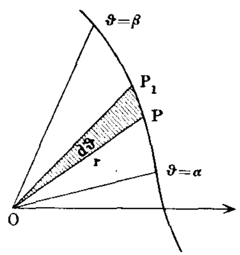
$$(3) \qquad s = 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4a\,(-\cos\pi + \cos 0) = 8a,$$

womit ein bereits S. 44 ausgesprochenes Resultat bestätigt ist.

12. Gebrauch der Polarcoordinaten.

Eine Curve C sei durch ihre Gleichung in Polarcoordinaten r, ϑ gegeben (vergl. S. 45), und es werde ein solches Stück der Curve betrachtet, welches zu jedem dem Intervall $\alpha \leqq \vartheta \leqq \beta$ angehörenden ϑ einen und nur einen Radius vector $r = \varphi(\vartheta)$ liefert.

Fig. 44.



Die Radien vectoren nach den beiden einander unendlich nahen Punkten P, P_1 der Curve schliessen im Verein mit dem Bogenelemente $\widehat{PP_1}$ einen unendlich schmalen Sector des Winkels $d\vartheta$ ein, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ ist (vergl. Fig. 44).

Ist die Maasszahl der Bogenlänge im Intervall mit ϑ gleichändrig, so ist das Bogendifferential nach S. 45 durch $\sqrt{r^2 d\vartheta^2 + dr^2}$ gegeben.

Durchmisst man das Intervall von $\vartheta = \alpha$ bis $\vartheta = \beta$ in unendlich kleinen Schritten $d\vartheta$ und bildet einmal die entsprechende Summe der Flächendifferentiale $\frac{1}{2} r^2 d\vartheta$, sodann diejenige der Bogendifferentiale ds, so ergiebt sich der

Lehrsatz: *Der Inhalt J derjenigen Fläche, welche durch die zu $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \beta$ gehörenden Radien vectoren und das dazwischen liegende Stück der Curve begrenzt wird, ist gegeben durch:*

$$(1) \quad \ldots\ldots J = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 d\vartheta = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\varphi(\vartheta)]^2 d\vartheta;$$

die Länge s jenes Curvenstückes aber ist gegeben durch:

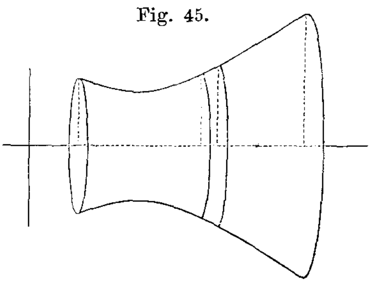
$$(2) \qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + [\varphi'(\vartheta)]^2}\, d\vartheta.$$

13. Cubatur der Rotationskörper.

Es sei $y = \varphi(x)$ eine Function, die im Intervall $a \leqq x \leqq b$ eindeutig, stetig und positiv ist.

Man denke das über dem Intervall gelegene Stück der Curve von $\varphi(x)$ gezeichnet und erzeuge durch Rotation desselben um die x-Axe einen Rotationskörper, den man sich durch zwei in $x = a$ und $x = b$ zur x-Axe senkrecht gelegte Ebenen begrenzt denke.

Fig. 45.



Zwei in den Punkten x und $(x + dx)$ zur x-Axe senkrecht errichtete Ebenen schneiden aus dem Rotationskörper eine unendlich schmale Scheibe vom Voluminhalt $\pi y^2\, dx = \pi [\varphi(x)]^2\, dx$ aus (siehe hier überall Fig. 45).

Durch Zerlegung des ganzen Rotationskörpers in Scheiben dieser Art entspringt der

Lehrsatz: *Der Voluminhalt V des in der bezeichneten Art eingegrenzten Rotationskörpers ist durch das Integral gegeben:*

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b [\varphi(x)]^2\, dx$$ [1].

Die vermöge (1) zu vollziehende Bestimmung des Cubikinhaltes V bezeichnet man als „*Cubatur*" des Rotationskörpers.

Beispiel: Zur Volumberechnung eines *geraden Kreiskegels* von der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche hat man zu setzen:

$$y = \frac{r}{h} x, \quad a = 0, \quad b = h.$$

Formel (1) liefert alsdann für das Volumen:

$$(2) \quad \ldots \quad V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\, dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \tfrac{1}{3} \pi r^2 h.$$

14. Complanation der Rotationsoberflächen.

Die in Nr. 13 aus dem Rotationskörper ausgeschnittene unendlich schmale Scheibe ist nach aussen durch einen auf der Rotationsober-

[1]) Streng genommen hat man die Ueberlegung zur Bildung des bestimmten Integrals (1) durch einen Grenzübergang zu begründen, welcher in jeder Hinsicht an dem S. 52 vollzogenen Grenzübergang sein Vorbild findet.

fläche gelegenen Gürtel begrenzt, welcher als Mantel eines abgestumpften Kegels angesehen werden kann.

Der Mantel dieses Kegels hat den Flächeninhalt $2\pi y\,ds$, und von hieraus gewinnt man [1]) den

Lehrsatz: *Die durch Rotation des in Nr. 13 besprochenen Curvenstückes $y = \varphi(x)$ entstehende Oberfläche hat den Flächeninhalt:*

$$(1) \qquad S = 2\pi \int_a^b y \frac{ds}{dx}\,dx = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Die Berechnung des Inhaltes S heisst „*Complanation*" der Oberfläche.

Beispiel: Zur Complanation der *Halbkugel* setze man:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad a = 0, \quad b = r$$

und findet vermöge des Ansatzes (1):

$$(2) \quad \ldots\ldots\ S = 2\pi r \int_0^r dx = 2\pi r^2.$$

VII. Capitel.

Theorie der unendlichen Reihen.

1. Begriffe der Convergenz und Divergenz einer Reihe.

Es seien $u_0, u_1, u_2, \ldots$ reelle Grössen in unendlicher Anzahl:

Erklärung: *Die aus den „Gliedern" $u_0, u_1, u_2, \ldots$ aufgebaute unendliche Reihe:*

$$(1) \quad \ldots\ldots\ u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

heisst „convergent", wenn die Summe S_n der n ersten Glieder:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

[1]) Um hier exact zu verfahren, benutze man die Formel $\pi(y + y_1)\Delta s$ für den Mantel des abgestumpften Kegels der Seite Δs und der Radien y, y_1 der Grundflächen. Theilt man die Curve $y = \varphi(x)$ über dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ in n *gleiche* Theile Δs und führt die Integralbildung nach S. 52 durch, so folgt die Formel (1) des Textes.

für lim. $n = \infty$ *einer „bestimmten endlichen“ Grenze S zustrebt; ist dies nicht der Fall, so heisst die Reihe „divergent“. Im ersten Falle heisst S der „Summenwerth“ oder kurz der „Werth“ der Reihe (1).*

Eine *convergente* Reihe liegt z. B. in der geometrischen Reihe:

$$(3) \quad \ldots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

vor. Man hat hier nämlich:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

und also ist $S = \lim\limits_{n=\infty} S_n = 2$ (vergl. den Schlusssatz in Nr. 12, S. 11).

Dem gegenüber hat man das Beispiel einer *divergenten* Reihe in:

$$(4) \quad \ldots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots.$$

Setzt man nämlich $n = 2^m$, so ist:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right).$$

Hier ist in der einzelnen der $(m-1)$ Klammern das letzte Glied $\frac{1}{2^k}$ stets das kleinste, und in der Klammer stehen 2^{k-1} Glieder. Der Zahlwerth der einzelnen Klammer ist somit $> \frac{1}{2}$, und man hat:

$$S_n > 1 + \frac{m}{2},$$

so dass für *lim.* $n = \infty$ keine endliche Grenze S eintritt.

Divergent ist auch die Reihe:

$$(5) \quad \ldots \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots;$$

denn obschon hier die Summe S_n mit wachsendem n nicht über alle Grenzen wächst, so nähert sich doch S_n keiner *bestimmten* Grenze.

2. Lehrsätze über convergente Reihen.

Lehrsatz I: *Für eine convergente Reihe gilt* $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$, *d. h. die Glieder derselben nähern sich einzeln genommen mit wachsendem Index* n *der Grenze 0.*

Denn es ist $S_{n+1} - S_n = u_n$; und da sich für *lim.* $n = \infty$ links Minuend und Subtrahend der gleichen Grenze S annähern, so ist *lim.* $u_n = 0$.

Die Reihe (4) in Nr. 1 zeigt, dass die Bedingung $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ zur Convergenz nicht ausreicht.

Lehrsatz II: *Eine convergente (divergente) Reihe bleibt convergent (divergent), falls man derselben neue Anfangsglieder in endlicher Anzahl vorsetzt oder derselben eine endliche Anzahl ihrer Anfangsglieder nimmt.*

Lehrsatz III: *Für eine Reihe mit ausschliesslich positiven Gliedern u_n ist entweder $\lim_{n=\infty} S_n = \infty$, oder die Reihe ist convergent.*

Da nämlich $S_{n+1} > S_n$ ist, so werden die S_n mit wachsendem Index n entweder über alle Grenzen gross werden, oder es giebt eine bestimmte endliche Grenze S, der die S_n ohne Ende nahe kommen, ohne sie zu überschreiten. —

Streicht man aus einer unendlichen Reihe irgend welche Glieder fort, jedoch so, dass noch eine unendliche Reihe übrig bleibt, so nennt man die letztere einen „*Bestandtheil*“ der gegebenen Reihe.

Lehrsatz IV: *Jeder Bestandtheil einer convergenten Reihe mit ausschliesslich positiven Gliedern liefert wieder eine convergente Reihe.*

Ist nämlich S der Werth der gegebenen Reihe und S'_n die Summe der n ersten Glieder des Bestandtheiles, so gilt $S'_n < S$.

Lehrsatz V: *Eine Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ ist jedenfalls dann convergent, wenn die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:*

(1) $\quad |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$

convergent ist (vergl. S. 10).

Nach Lehrsatz II ist diese Behauptung offenbar richtig, wenn in der gegebenen Reihe nur *endlich viele* negative (positive) Glieder vorkommen.

Ist dies nicht der Fall, so streiche man in (1) alle die Glieder, welche negativen Gliedern u_n entsprechen, und möge so:

(2) $\quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$

als Bestandtheil von (1) gewinnen. Durch Streichung aller positiven Gliedern u_n zugehörigen Glieder in (1) folge:

(3) $\quad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots.$

Schreibt man $S'_l = v_0 + v_1 + \cdots + v_{l-1}$ und $S''_m = w_0 + w_1 + \cdots + w_{m-1}$, so giebt es nach Lehrsatz IV zwei bestimmte endliche Grenzen:

(4) $\quad S' = \lim_{l=\infty} S'_l, \qquad S'' = \lim_{m=\infty} S''_m.$

Sind nun unter den n ersten Gliedern der ursprünglichen Reihe l positive und $m = n - l$ negative, so ist:

(5) $\quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = S_n = S'_l - S''_m.$

Damit ergiebt sich vermöge (4) in der That eine bestimmte endliche Grenze:

(6) $\quad S = \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{l=\infty} S'_l - \lim_{m=\infty} S''_m = S' - S'';$

denn zufolge der Annahme sollten mit $\lim.\ n = \infty$ auch l und m über alle Grenzen wachsen.

3. Convergenzkriterium für Reihen aus positiven Gliedern.

Princip der Reihenvergleichung: *Es seien zwei Reihen aus nur positiven Gliedern vorgelegt:*

$$(1) \quad . \quad . \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \textit{und} \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots,$$

und es sei bekannt, dass die zweite Reihe convergent (divergent) ist. Wenn alsdann von einem gewissen endlichen Index m an für alle $k \geqq m$ die Bedingung $u_k \leqq v_k$ (bezw. $u_k \geqq v_k$) erfüllt ist, so ist auch die erste Reihe convergent (divergent).

Vermöge dieses Princips beweist man folgenden

Lehrsatz: *Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ aus nur positiven Gliedern ist convergent, wenn sich eine solche positive Zahl $r < 1$ angeben lässt, dass von einem bestimmten endlichen Index m an für alle $k \geqq m$ die Bedingung besteht:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqq r < 1.$$

Aus (2) folgt nämlich:

$$u_{m+1} \leqq r u_m, \quad u_{m+2} \leqq r u_{m+1} \leqq r^2 u_m, \ldots,$$
$$u_{m+n} \leqq r u_{m+n-1} \leqq \cdots \leqq r^n u_m.$$

Setzt man daraufhin:

$$v_i = u_i \text{ für } i \leqq m \quad \text{und} \quad v_k = r^{k-m} u_m \text{ für } k \geqq m,$$

so wird die Bedingung $u_k \leqq v_k$ für alle Indices gelten.

Nun ist die Reihe der v wegen $0 < r < 1$ sicher convergent (vergl. S. 11) und hat den Summenwerth:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1} + u_m \cdot \frac{1}{1-r};$$

der zu beweisende Lehrsatz ergiebt sich somit vermöge des Princips der Reihenvergleichung.

Lehrsatz: *Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ aus lauter nicht verschwindenden positiven Glieder ist divergent, falls von einem bestimmten endlichen Index m an für alle $k \geqq m$ die Bedingung gültig ist:*

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqq 1.$$

In diesem Falle ist nämlich bereits die zur Convergenz nothwendige Bedingung $\lim\limits_{n=\infty}.\ u_n = 0$ nicht erfüllt.

Reihen, bei denen $\lim\limits_{n=\infty}.\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ist, können auf ihre Convergenz oder Divergenz auf Grund der bisherigen Sätze noch nicht untersucht werden. Hierher gehört z. B. die Reihe (4), S. 61, bei welcher man hat:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2}, \quad u_n = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}},$$

so dass der Quotient zweier auf einander folgender Glieder für $lim.\, n = \infty$ in der That die Grenze 1 hat.

Von der Aufstellung genauerer Convergenzkriterien wird indess hier abgesehen.

4. Bedingt und unbedingt convergente Reihen.

Erklärung: *Eine convergente Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, *welche sowohl positive, als auch negative Glieder in unendlicher Anzahl aufweist, heisst unbedingt (bedingt) convergent, falls die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:*

(1) . . . . $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$

convergent (divergent) ist.

Im Anschluss an (1) definire man die beiden Reihen:

(2) $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ und $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$

wie in Nr. 2 und gebrauche auch die dort erklärten Bezeichnungen $S'_l, S''_m \ldots$

Geht die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ durch eine beliebige „*Neuanordnung*“ der Glieder in $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots$ über, so wird jedes Glied u_i der ersten Reihe sich als ein Glied u'_k der zweiten auffinden lassen und andererseits auch jedes Glied u'_l der zweiten Reihe als ein u_m in der ersten.

Lehrsatz: *Eine unbedingt convergente Reihe des Summenwerthes S behält auch nach einer beliebigen Neuanordnung der Glieder denselben Summenwerth S; der Werth S einer unbedingt convergenten Reihe ist somit von der Gliederanordnung unabhängig.*

In diesem Falle sind nämlich die beiden Reihen (2) convergent.

Da nun mit $lim.\, n = \infty$ auch $lim.\, l = \infty$ und $lim.\, m = \infty$ anzunehmen ist, so kann man nach Auswahl einer beliebig kleinen, positiven und nicht verschwindenden Zahl δ den Index n so gross wählen, dass:

(3) . . . $0 < S' - S'_l < \delta, \qquad 0 < S'' - S''_m < \delta$

ist.

Für die Neuanordnung $u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots$ definiren wir entsprechende Reihen (1) und (2) und benutzen für die Summe von Anfangsgliedern das Zeichen Σ an Stelle von S. Kommen somit unter den n' ersten Gliedern der Neuanordnung l' positive und m' negative vor, so ist $\Sigma_{n'} = \Sigma'_{l'} - \Sigma''_{m'}$.

Nun wähle man n' so gross, dass alle Glieder von S_n sich auch in $\Sigma_{n'}$ finden. Dann ist auch $\Sigma'_{l'} \geqq S'_l$ und $\Sigma''_{m'} \geqq S''_m$; und da überdies

$\Sigma'_{l'} < S'$, $\Sigma''_{m'} < S''$ gilt (vergl. den Beweis zum Lehrsatz III, S. 62), so folgt vermöge (3):

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad 0 < S' - \Sigma'_{l'} < \delta, \qquad 0 < S'' - \Sigma''_{m'} < \delta.$$

Durch Subtraction folgt weiter:

$$-\delta < (S' - S'') - (\Sigma'_{l'} - \Sigma''_{m'}) < \delta,$$
$$-\delta < S - \Sigma_{n'} < \delta,$$

so dass $\lim\limits_{n'=\infty} \Sigma_{n'} = S$ ist, w. z. b. w. —

Lehrsatz: *Eine bedingt convergente Reihe lässt sich in eine solche Neuanordnung bringen, dass der Summenwerth eine beliebig gewählte positive oder negative Zahl S ist.*

In diesem Falle sind nämlich beide Reihen (2) divergent; denn wären sie beide convergent, so wäre auch die Reihe (1) convergent; und wäre die eine Reihe (2) convergent und die andere divergent, so könnte $S_n = S'_l - S''_{m'}$ für $\lim. n = \infty$ nicht endlich sein.

Es lässt sich demnach, wenn etwa $S > 0$ ist, ein endlicher Index n_1 so wählen, dass:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n_1-1} \leqq S < v_0 + v_1 + \cdots + v_{n_1}$$

zutrifft. Demnächst reihe man die ersten negativen Glieder $-w_0$, $-w_1, \ldots$ an und bestimme den Index m_1 so, dass man hat:

$$v_0 + \cdots + v_{n_1} - w_0 - \cdots - w_{m_1-1} \geqq S > v_0 + \cdots$$
$$+ v_{n_1} - w_0 - \cdots - w_{m_1}.$$

Jetzt folgt die Anreihung von $v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \ldots, v_{n_2}$, und zwar so, dass:

$$(5) \qquad v_0 + \cdots + v_{n_1} - w_0 - \cdots - w_{m_1} + v_{n_1+1} + \cdots + v_{n_2},$$

aber noch nicht die nächst voraufgehende Summe, den Betrag S übertrifft. Ein solcher endlicher Index n_2 lässt sich auffinden, da die Reihe $v_0 + v_1 + \cdots$ auch nach Fortnahme der $(n_1 + 1)$ ersten Glieder divergent bleibt (Lehrsatz II, S. 62).

Vermöge des so eingeleiteten alternirenden Verfahrens bringe man alle Glieder der ursprünglichen Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ unter.

Dabei ist der Ueberschuss der Summe (5) über S nicht grösser als v_{n_2}, und auch bei allen weiter folgenden Summen kann der Ueberschuss über S die grösste der auf v_{n_2} folgenden Zahlen $v_{n_2+1}, v_{n_2+2}, \ldots$ nicht übertreffen. Entsprechendes gilt, wenn man bei der Neuanordnung bis zu einer Summe des Endgliedes v_{n_k} gelangt ist.

Auf der anderen Seite schliesst man den Ueberschuss von S über die in Rede stehenden Summen entsprechend vermöge der Zahlen w_m ein.

Aus der Convergenz von $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ folgt nun $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ (vergl. Lehrsatz I, S. 61), und also ist auch $\lim\limits_{n=\infty} v_n = 0$, $\lim\limits_{m=\infty} w_m = 0$.

Die fraglichen Summen nähern sich somit bei wachsender Gliederanzahl dem Betrage S, w. z. b. w.[1]).

Als Beispiel einer bedingt convergenten Reihe diene:

$$(6) \quad . \; . \; . \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$$

in dieser Anordnung hat dieselbe den Summenwerth $\log 2$, wie unten gezeigt wird.

5. Begriff der Potenzreihen.

Erklärung: *Ist $u_n = a_n x^n$, unter a_n einen constanten Coëfficienten und unter x eine Variabele verstanden, so ergiebt sich:*

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

als Gestalt der unendlichen Reihe. Eine solche Reihe bezeichnet man als eine „Potenzreihe".

Die Reihe (1) ist unbedingt convergent, falls die zugehörige Reihe der absoluten Beträge convergent ist:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad |a_0| + |a_1 \,.\, x| + |a_2 \,.\, x^2| + \cdots$$

Man nehme erstlich an, es gäbe eine *grösste positive* und *endliche* Zahl $x = g$, so dass $|a_n| \,.\, g^n$ für $\lim. n = \infty$ *nicht* über alle Grenzen wächst. Dann kann man eine endliche Zahl h angeben, so dass die Ungleichung:

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad |a_n| g^n < h$$

für alle n gilt.

Nun wähle man x so, dass $|x| < g$ und also $\frac{|x|}{g} = r < 1$ ist.

Schreibt man alsdann die Reihe (2) in der Gestalt:

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \quad |a_0| + |a_1| g \,.\, r + |a_2| g^2 \,.\, r^2 + \cdots,$$

so ist jedes Glied u_k derselben kleiner als das entsprechende Glied der (wegen $r < 1$) convergenten Reihe:

$$h + hr + hr^2 + hr^3 + \cdots$$

Nach dem Princip von S. 63 ist somit die Reihe (4) convergent.

Lehrsatz: *Ist x in dem Intervall $-g < x < +g$ enthalten, so convergirt die Reihe (1) unbedingt; jenes Intervall heisst dieserhalb das Convergenzintervall der Potenzreihe (1).*

Zusatz: *Lässt sich für „jedes" positive endliche g eine gleichfalls endliche Zahl h finden, so dass die Ungleichung (3) für alle Indices n besteht, so ist die Reihe im Intervall $-\infty < x < +\infty$, d. i. für jeden Werth von x convergent.*

---

[1]) Uebrigens wird man bei $S < 0$ die Bildung der Summen mit $-w_0$, $-w_1, \ldots$ beginnen, während es bei $S = 0$ freisteht, ob man mit v_0 oder $-w_0$ beginnen will.

Ob die Potenzreihe auf einer der „*Convergenzgrenzen*“ $x = g$ oder $x = -g$ noch convergent ist, muss in jedem Falle einzeln entschieden werden.

Vermöge weiterer (hier nicht anzugebender) Betrachtungen gewinnt man den

Lehrsatz: *Eine Potenzreihe stellt in ihrem Convergenzintervall eine „stetige“ Function von x vor; und sie bleibt auch noch bis $x = g$ (oder $x = -g$) „inclusive“ stetig, falls für $x = g$ (resp. $x = -g$) überhaupt noch Convergenz stattfindet.*

6. Vorentwickelungen zu den Sätzen von Taylor und Mac-Laurin.

Erklärung: *Das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ der ganzen positiven Zahlen von 1 bis n bezeichnet man mit $n!$ und liest dies Zeichen „n-Facultät“.*

Die Function $f(x)$ sei sammt ihren n ersten Ableitungen im Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$, die Grenzen eingeschlossen, eindeutig und stetig.

Dasselbe gilt somit von der Function:

$$(1) \quad \begin{cases} F(x) = f(b) - f(x) - f'(x) \cdot \dfrac{b-x}{1!} - f''(x) \cdot \dfrac{(b-x)^2}{2!} - \cdots \\ \qquad\qquad - f^{(n-1)}(x) \cdot \dfrac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{cases}$$

Differentiirt man $F(x)$, so heben sich alle Glieder bis auf eins fort:

$$(2) \quad \frac{dF(x)}{dx} = -f^{(n)}(x) \cdot \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Da hiernach $F'(x)$ im Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$ eindeutig und stetig ist, so findet man nach S. 54:

$$(3) \quad -\int_a^b \frac{f^{(n)}(x)\;(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx = F(b) - F(a) = -F(a);$$

denn aus (1) folgt $F(b) = 0$.

Drückt man $F(a)$ vermöge (1) aus, so folgt der

Lehrsatz: *Ist $f(x)$ sammt seinen n ersten Ableitungen im Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$ (inclusive a und b) eindeutig und stetig, so gilt die Gleichung:*

$$(4) \quad \begin{cases} f(b) = f(a) + f'(a) \cdot \dfrac{b-a}{1!} + f''(a) \cdot \dfrac{(b-a)^2}{2!} + \cdots \\ \quad + f^{(n-1)}(a) \cdot \dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \displaystyle\int_a^b \frac{f^{(n)}(x)\,(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx. \end{cases}$$

Das letzte, vermöge des bestimmten Integrales ausgedrückte Glied der rechtsseitigen Entwickelung soll das „*Restglied*“ derselben heissen und durch R_n bezeichnet werden:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R_n = \int_a^b \frac{f^{(n)}(x)\,(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx.$$

Zur Umgestaltung von R_n soll der Mittelwerthsatz (5), S. 56, Anwendung finden. Beim Beweise dieses Satzes wurde angenommen, dass $a < b$ sei; doch gilt er auch für $a > b$, da die Formel (5), S. 56, richtig bleibt, falls man sowohl rechts als links die untere mit der oberen Integralgrenze tauscht. Es wurde ferner angenommen, dass $\psi(x)$ im Intervall nirgends negativ sei; doch gilt Formel (5), S. 56, auch noch, falls $\psi(x)$ im Intervall nirgends positiv ist, da die Formel bestehen bleibt, wenn man beiderseits $-\psi(x)$ statt $\psi(x)$ schreibt.

Den im Intervall gelegenen Werth $x = c$ kann man so schreiben:

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad c = a + \vartheta\,(b-a), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1;$$

denn es wird, mag nun $a < b$ oder $a > b$ sein, der Werth c das Intervall gerade vollständig beschreiben, falls ϑ stetig von 0 bis 1 wächst.

Die Bedingungen des Mittelwerthsatzes sind erfüllt, wenn man:

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x), \qquad \psi(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

setzt. Dies liefert für R_n die Gestalt:

$$\text{(I)} \qquad R_n = f^{(n)}[a + \vartheta\,(b-a)] \cdot \frac{(b-a)^n}{n!}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Die Bedingungen des Mittelwerthsatzes sind auch für:

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x) \cdot \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \psi(x) = 1.$$

erfüllt. Diese Auswahl liefert für R_n die Gestalt:

$$\text{(II)} \quad R_n = f^{(n)}[a + \vartheta'\,(b-a)] \cdot \frac{(1-\vartheta')^{n-1}\,(b-a)^n}{(n-1)!}, \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Jedes Mal bedeutet ϑ einen *bestimmten* im Intervall von 0 bis 1 gelegenen Werth, der indessen allgemein nicht näher angebbar ist.

7. Der Taylor'sche Lehrsatz.

Trägt man $a = x$ und $b - a = h$ in (4) Nr. 6 ein, so ergiebt sich der

Taylor'sche Lehrsatz: *Ist die Function $f(x)$ sammt ihren n ersten Ableitungen im Intervall von x bis $(x+h)$ eindeutig und stetig, so gilt die Gleichung:*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!} + \cdots \\ + f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n, \end{cases}$$

deren rechte Seite man als die „Taylor'sche Reihe" für $f(x)$ bezeichnet. Das „Restglied" R_n kann man noch (I) Nr. 6 in die von Lagrange angegebene Gestalt setzen:

$$(2) \qquad R_n = f^{(n)}(x + \vartheta h)\cdot\frac{h^n}{n!}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

oder nach (II) Nr. 6 in die von Cauchy herrührende Gestalt:

$$(3) \qquad R_n = f^n(x + \vartheta' h)\cdot\frac{(1-\vartheta')^{n-1}\cdot h^n}{(n-1)!}, \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Für $h = \Delta x$ und $n = 1$ kommt bei Benutzung der Lagrange'schen Gestalt des Restgliedes die oben bereits benutze Formel (2), S. 30.

Ist $f(x)$ mit seinen sämmtlichen Ableitungen im Intervall von x bis $(x + h)$ eindeutig und stetig, so bilde man die unendliche Reihe:

$$f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

setze die Summe der n ersten Glieder gleich S_n und mache $S = f(x + h)$.

Formel (1) liefert alsdann $S - S_n = R_n$.

Lehrsatz: *Ist die Function $f(x)$ mit ihren sämmtlichen Ableitungen im Intervall von x bis $(x + h)$ eindeutig und stetig, und ist für die vorliegenden Werthe x und h die Bedingung $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ erfüllt, so ist die auf der rechten Seite von*

$$(4) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

stehende unendliche Taylor'sche Reihe convergent und hat den links stehenden Summenwerth $f(x + h)$.

8. Der Mac-Laurin'sche Lehrsatz.

Setzt man $a = 0$, $b = x$ in (4), S. 67, ein, so folgt der

Mac-Laurin'sche Lehrsatz: *Ist $f(x)$ sammt seinen n ersten Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig, so gilt:*

$$(1) \qquad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{x}{1!} + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + \cdots$$
$$+ f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

wo die rechts stehende Reihe als „Mac-Laurin'sche Reihe" von $f(x)$

bezeichnet wird. Das „Restglied" kann man nach (I), S. 68 in die Lagrange'sche Gestalt setzen:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R_n = f^{(n)}(\vartheta x) \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

sowie auch nach (II), S. 68 in die Cauchy'sche Gestalt:

$$(3) \quad . \quad . \quad R_n = f^{(n)}(\vartheta' x) \cdot \frac{(1-\vartheta')^{n-1} x^n}{(n-1)!}, \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Für die Fortsetzung der Mac-Laurin'schen Reihe bis ins Unendliche gelten dieselben Ueberlegungen wie in Nr. 7.

Lehrsatz: *Ist $f(x)$ mit seinen sämmtlichen Ableitungen im Intervall zwischen 0 und x (die Grenzen stets eingeschlossen) eindeutig und stetig, und ist für den fraglichen Werth x die Bedingung $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ erfüllt, so ist die rechter Hand in:*

$$(4) \quad f(x) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{x}{1!} + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

stehende unendliche Mac-Laurin'sche Reihe convergent und hat $f(x)$ zum Summenwerth.

9. Reihenentwickelung der Exponentialfunction.

Ist x ein beliebiger positiver oder negativer endlicher Werth, so ist $f(x) = e^x$ mit allen Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig; denn es ist $f^{(n)}(x) = e^x$.

Das Restglied R_{m+n} nach (2), Nr. 8 gebildet, wird für e^x:

$$(1) \qquad R_{m+n} = \frac{e^{\vartheta x} x^{m+n}}{(m+n)!} = \left(\frac{e^{\vartheta x} . x^m}{m!}\right) \cdot \frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2} \cdots \frac{x}{m+n} \cdot$$

Wählt man $m > |x|$, so sind die letzten n Brüche in (1) alle absolut < 1 und haben für $\lim. n = \infty$ die Grenze 0. Da der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von (1) endlich ist, so ist $\lim_{n=\infty} R_{m+n} = 0$.

Lehrsatz: *Die Exponentialgrösse e^x lässt sich in die für alle endlichen Werthe von x convergente Potenzreihe entwickeln:*

$$(2) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots,$$

wie aus (4), Nr. 8 folgt.

Für $x = 1$ entspringt als *unendliche Reihe für die Zahl e:*

$$(3) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

Da $a^x = e^{x.\log a}$ ist, so folgt aus (2) als *Potenzreihe für a^x:*

$$(4) \qquad a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + \cdots$$

10. Reihenentwickelung der Functionen $sin\, x$ und $cos\, x$.

Ist x ein beliebiger endlicher Werth, so sind die Functionen $sin\, x$ und $cos\, x$ mit sämmtlichen Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig.

Für $f(x) = sin\, x$ folgt aus (2), Nr. 8:

$$R_{2m+2n} = \pm\, sin\,(\vartheta x) \cdot \frac{x^{2m+2n}}{(2m+2n)!}$$

$$= \pm \left[\frac{sin\,(\vartheta x)\,.\,x^{2m}}{(2m)!}\right] \cdot \frac{x}{2m+1} \cdot \frac{x}{2m+2} \cdots \frac{x}{2m+2n}.$$

Wählt man $2m > |x|$, so findet man auf demselben Wege, wie in Nr. 9, $\lim\limits_{n=\infty} R_{2m+2n} = 0$. Gerade so findet man $\lim\limits_{n=\infty} R_{2m+2n+1} = 0$ und führt eine entsprechende Betrachtung für $f(x) = cos\, x$ durch.

Formel (4), Nr. 8 liefert daraufhin den

Lehrsatz: *Die Functionen $sin\, x$ und $cos\, x$ lassen sich in die für alle endlichen Werthe x convergenten Potenzreihen entwickeln:*

$$(1) \quad \ldots \quad sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots,$$

$$(2) \quad \ldots \quad cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots.$$

Diese Formeln und ebenso die Formel (2), Nr. 9 liefern wichtige Hülfsmittel zur Berechnung der Werthe der Functionen $sin\, x$, $cos\, x$, e^x bei gegebenem x.

11. Reihenentwickelung der Function $log\,(1+x)$.

Für die Function $f(x) = log\,(1+x)$ ergiebt sich:

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x},\; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\; f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3},\; \cdots,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Wählt man demnach $x > -1$, übrigens aber als beliebige endliche Zahl, so ist $f(x)$ mit seinen sämmtlichen Ableitungen im Intervall von 0 bis x eindeutig und stetig.

Für das Restglied R_n der Mac-Laurin'schen Reihe findet man, je nachdem die Formel (2) oder (3), Nr. 8 in Anwendung gebracht wird, die erste oder zweite der folgenden Gestalten:

$$(2) \quad \ldots \quad R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n,$$

$$(3) \quad \ldots \quad R_n = \left(\frac{-x+\vartheta' x}{1+\vartheta' x}\right)^{n-1} \cdot \frac{x}{1+\vartheta' x}.$$

Ist $0 < x < 1$, so ist natürlich auch $0 < x < 1 + \vartheta x$, sowie $0 < \frac{x}{1 + \vartheta x} < 1$; und also folgt aus (2) offenbar $\lim_{n=\infty} R_n = 0$.

Ist hingegen $-1 < x < 0$, so ist $0 < -x < 1$, und also:

$$0 \leqq -x(1 - \vartheta') = -x + \vartheta' x < 1 + \vartheta' x,$$

$$0 \leqq \frac{-x + \vartheta' x}{1 + \vartheta' x} < 1.$$

Jetzt ergiebt sich sonach $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ aus Formel (3).

Der Ansatz (4), Nr. 8 liefert daraufhin folgenden

Lehrsatz: *Die Function $\log(1 + x)$ lässt sich in dem Intervall $-1 < x < +1$ in die convergente Potenzreihe entwickeln:*

$$(4) \quad . \; . \; . \; \log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Dass die auf der rechten Seite in (4) stehende Reihe für $|x| > 1$ *nicht* convergent ist, folgt auf Grund des zweiten Lehrsatzes in Nr. 3, S. 63, aus der für die Reihe (4) geltenden Gleichung:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -x \cdot \frac{n}{n+1};$$

denn dieser Quotient nähert sich für $\lim. n = \infty$ der Grenze $-x$ und ist somit von einem bestimmten n an absolut > 1.

Zusatz: *Für die Convergenzgrenze $x = -1$ ist die Reihe (4) divergent (vergl. S. 61); für $x = +1$ ist sie convergent und liefert nach dem letzten Lehrsatze in Nr. 5:*

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \; \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Die Convergenz ergiebt sich aus den beiden Schreibarten:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots,$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots$$

der Reihe (5). Die erste zeigt nämlich, dass die Reihe entweder convergent ist oder dass $\lim_{n=\infty} S_n = \infty$ ist (Lehrsatz III, S. 62); die zweite zeigt, dass $S_n < 1$ bleibt. —

Liegt x zwischen -1 und $+1$, so gilt dasselbe von $-x$, und also ist:

$$\log(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

Durch Subtraction dieser Formel von obiger Formel (4) folgt:

$$(6) \qquad \log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right).$$

Versteht man unter N eine positive ganze Zahl, und setzt $x = \frac{1}{N}$ in (4) und $x = \frac{1}{2N+1}$ in (6) ein, so folgen die Formeln:

$$(7) \qquad \log(N+1) = \log N + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + \cdots,$$

$$(8) \qquad \log(N+1) = \log N + 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \cdots\right).$$

Diese Formeln sind geeignet zur Berechnung des natürlichen Logarithmus der ganzen Zahl $(N+1)$ aus dem von N.

Wegen des Ueberganges zu den Logarithmen einer anderen Basis sehe man S. 19.

12. Die Binomialreihe.

Ist m ein positiver oder negativer rationaler Bruch (die ganzen Zahlen m einbegriffen), und ist $x > -1$, so giebt es einen und nur einen zugehörigen Werth $f(x) = (1+x)^m$, der reell und zugleich positiv ist. Auch alle Ableitungen der hiermit definirten Function sind mit $f(x)$ selbst für jedes endliche $x > -1$ eindeutig und stetig.

Die n^{te} Ableitung ist

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

so dass

$$(1) \qquad \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \binom{m}{n}$$

wird, wo rechts die in (2), S. 28, bei Gelegenheit des „n^{ten} *Binomial-coëfficienten der* m^{ten} *Potenz*“ erklärte Abkürzung gebraucht ist.

Zur Untersuchung des Restgliedes knüpfen wir an den Integralansatz (5), S. 68, und nehmen sogleich $a = 0$:

$$(2) \quad \ldots \; R_n = n\binom{m}{n}\int_0^b (1+x)^{m-n}(b-x)^{n-1}\,dx.$$

Die Bedingungen des Mittelwerthsatzes sind erfüllt, wenn wir

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = (1+x)^{m+1}, \quad \psi(x) = \dfrac{(b-x)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \dfrac{-1}{n(1+b)} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{b-x}{1+x}\right)^n \end{cases}$$

setzen (vergl. S. 56 und S. 68).

Nun ist, wie bereits in (3) angedeutet wurde:

$$\int \psi(x)\,dx = -\frac{1}{n(1+b)} \cdot \left(\frac{b-x}{1+x}\right)^n, \quad \int_0^b \psi(x)\,dx = \frac{b^n}{n(1+b)}.$$

Daraufhin ergiebt der Mittelwerthsatz (5), S. 56:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R_n = \binom{m}{n} (1 + \vartheta b)^{m+1} \cdot \frac{b^n}{1+b}.$$

Setzt man $b = x$ (vergl. Nr. 8), so folgt als Restglied der Mac-Laurin'schen Reihe für $(1 + x)^m$:

$$(5) \quad \begin{cases} R_n = \binom{m}{n} \dfrac{x^n (1 + \vartheta x)^{m+1}}{1+x} = \dfrac{(1 + \vartheta x)^{m+1}}{1+x} \\ \qquad\qquad \cdot \left[\dfrac{m\,x}{1} \cdot \dfrac{(m-1)\,x}{2} \cdots \dfrac{(m-n+1)\,x}{n}\right]. \end{cases}$$

Lässt man n grösser und grösser werden, so treten in der Klammer auf der rechten Seite von (5) mehr und mehr Factoren hinzu, die sich für $lim.\ n = \infty$ der Grenze $-x$ nähern. Es wird somit $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ oder $= \infty$, je nachdem $|x| < 1$ oder > 1 ist.

Lehrsatz: *Ist m irgend ein rationaler Bruch und liegt x im Intervall $-1 < x < +1$, so gestattet die oben erklärte Function $(1 + x)^m$ die convergente Entwickelung:*

$$(6) \quad (1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \cdots;$$

diese Reihe wird die Binomialreihe genannt.

Ist m eine ganze positive Zahl, so verschwinden die Coëfficienten von x^{m+1}, x^{m+2} ..., und es stellt sich der binomische Lehrsatz in der S. 28 besprochenen Gestalt wieder ein.

13. Methode der unbestimmten Coëfficienten.

Eine vorgelegte Function $f(x)$ möge in die Potenzreihe:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

entwickelbar sein, welche innerhalb eines gewissen Intervalles convergent ist.

Wie man durch eingehendere Betrachtungen zeigen kann, gilt alsdann für $f'(x)$ die durch gliedweises Differentiiren der rechten Seite von (1) entspringende Potenzreihe:

$$(2) \quad . \quad . \quad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots,$$

welche in demselben Intervall, wie die Reihe (1), convergent ist.

Hieraus kann man weiter schliessen, dass die Reihe (1) nothwendig die Mac-Laurin'sche Entwickelung von $f(x)$ ist, und dass somit ausser dieser keine andere Potenzreihe für $f(x)$ existirt.

Ist die Berechnung von a_n auf Grund des Ansatzes (4), Nr. 8 schwierig, so ist gelegentlich folgende Operationsweise erfolgreich: *Man setzt die Potenzreihe von $f(x)$ mit unbestimmten Coëfficienten, d. i. in der Form (1), an und sucht die Coëfficienten a_0, a_1, a_2 ... daraus zu* *bestimmen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von (1) die Eigenschaften der Function $f(x)$ besitzen muss.*

Zur Erläuterung dieser „*Methode der unbestimmten Coëfficienten*" diene erstlich die Function $f(x) = arc\, tg\, x$, wobei der „Hauptwerth" dieser Function gemeint ist.

Aus letzterem Umstande folgt $a_0 = 0$; denn der Hauptwerth $arc\, tg\, (0)$ ist $= 0$ (vergl. S. 9).

Weiter benutze man $f'(x) = (1 + x^2)^{-1}$ und ziehe aus Nr. 12:

$$(3) \quad . \; . \; f'(x) = (1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

als eine im Intervall $-1 < x < +1$ convergente Entwickelung.

Durch Vergleich von (2) und (3) folgt ohne Weiteres:

$$a_1 = 1, \;\; 2a_2 = 0, \;\; 3a_3 = -1, \;\; 4a_4 = 0, \;\; 5a_5 = 1 \ldots.$$

Lehrsatz: *Der Hauptwerth der Function $arc\, tg\, x$ gestattet die im Intervall $-1 < x < +1$ convergente Reihenentwickelung:*

$$(4) \quad . \; . \quad arc\, tg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots.$$

Auch an der oberen Convergenzgrenze $x = 1$ bleibt die Convergenz bestehen[1]; und da der Hauptwerth $arc\, tg\, 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, so ergiebt sich nach dem Lehrsatz am Ende von Nr. 5, S. 67 für $\frac{\pi}{4}$ die Entwickelung:

$$(5) \quad . \; . \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Für den Hauptwerth $f(x) = arc\, sin\, x$ ist gleichfalls $a_0 = 0$. Andererseits hat man $f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, so dass man aus Nr. 12:

$$(6) \quad . \; . \; f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

als eine im Intervall $-1 < x < +1$ convergente Entwickelung entnimmt.

Der Vergleich von (2) und (6) liefert $a_0, a_1 \ldots$ und damit den

Lehrsatz: *Der Hauptwerth der Function $arc\, sin\, x$ gestattet die im Intervall $-1 < x < 1$ convergente Reihenentwickelung:*

$$(7) \quad arc\, sin\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ergiebt sich hieraus:

$$(8) \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7.2^7} + \cdots$$

---

[1]) Siehe die an (5), S. 72 angeschlossene Betrachtung.

VIII. Capitel.

Bestimmung der unter den Gestalten $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ... sich darstellenden Functionswerthe.

1. Die unbestimmte Gestalt $\frac{0}{0}$.

Ist eine elementare Function in der Gestalt $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ gegeben, und werden für den *endlichen* Werth $x = a$ *Zähler und Nenner zugleich mit 0 identisch*, $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$, so bietet sich $f(a)$ in der Gestalt $\frac{0}{0}$ dar, mit welcher man keinen bestimmten Sinn oder Zahlwerth verknüpfen kann.

Um gleichwohl von einem Functionswerthe $f(a)$ sprechen zu können, giebt man folgende

Erklärung: *Als „wahren Werth" $f(a)$ der Function $f(x)$ für $x = 0$ bezeichnet man den Grenzwerth:*

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ f(a) = \lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right).$$

Dabei gilt hier und in den weiter zur Sprache kommenden Fällen die *Annahme, dass überhaupt eine solche Grenze existirt.*

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in der „Umgebung" von $x = a$ stetig und gilt dasselbe von $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$, so dient folgende Ueberlegung zur Bestimmung von $f(a)$:

Man wähle den Werth $x = b$ in der Umgebung von a so, dass $\varphi(b)$ und $\psi(b)$ von 0 verschieden sind, und setze darauf hin:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\varphi(b)}{\psi(b)} = A, \quad F(x) = \varphi(x) - A\,\psi(x).$$

Die Function $F(x)$ ist sammt ihrer Ableitung im Intervall von a bis b stetig, und sie verschwindet sowohl für $x = a$ wie für $x = b$, ohne im ganzen Intervall gleich 0 zu sein[1]).

Es giebt demnach im Intervall wenigstens einen Werth c, für welchen $F(x)$ zu einem Maximum oder Minimum wird; und hieraus folgt bei den geltenden Voraussetzungen:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ F'(c) = \varphi'(c) - A\,\psi'(c) = 0.$$

Den hieraus entspringenden Werth A setze man in die erste

[1]) Dieser Fall würde trivial sein und $f(a) = A$ liefern.

Gleichung (2) ein, schreibe $c = a + \vartheta\,(b - a)$ und ersetze b durch x; dann ergiebt sich:

$$(4) \quad \ldots \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}, \quad x_1 = a + \vartheta\,(x - a).$$

Für $lim.\ x = a$ wird auch $lim.\ x_1 = a$; und also folgt der

Lehrsatz: *Nähern sich die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $lim.\ x = a$ zugleich der Grenze 0, so gilt die Gleichung:*

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right).$$

Sollten auch $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ zugleich zu 0 werden, falls $x = a$ wird, so werden wir unter der Voraussetzung, dass $\varphi''(x)$ und $\psi''(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig sind, durch erneute Anwendung der Gleichung (5):

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}\right)..$$

finden und nöthigenfalls die gleiche Schlussweise noch öfter wiederholen.

Lehrsatz: *Werden Zähler und Nenner, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, von $f(x)$ sammt ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen zugleich zu 0, falls $x = a$ wird, während $\varphi^{(n)}(a)$ und $\psi^{(n)}(a)$ wenigstens nicht beide gleich 0 sind, so gilt die Gleichung:*

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad f(a) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}.$$

Dasselbe Ergebniss liefert die Anwendung des Taylor'schen Satzes (1) und (2), S. 69, aus welchem man unter den hier gültigen Voraussetzungen folgert:

$$(8) \quad \varphi(a+h) = \varphi^{(n)}(a + \vartheta h)\,\frac{h^n}{n!}, \quad \psi(a+h) = \psi^{(n)}(a + \vartheta' h)\cdot\frac{h^n}{n!};$$

dabei ist natürlich ϑ' im Allgemeinen von ϑ verschieden.

Bildet man den Quotienten der Gleichungen (8), so liefert die Grenze $lim.\ h = 0$ die Regel (7) wieder.

Beispiele sind:

$$\lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x=0}\left(\frac{\cos x}{1}\right) = 1,$$

$$\lim_{x=0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}\right) = \lim_{x=0}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}\right) = 2,$$

deren erstes die Formel (1), S. 20 bestätigt.

2. Die unbestimmte Gestalt $\frac{\infty}{\infty}$.

Erklärung: *Hat die Function $f(x)$ dieselbe Gestalt wie in Nr. 1, und werden Zähler und Nenner von $f(x)$ für $x = a$ beide unendlich gross, $\varphi(a) = \infty$, $\psi(a) = \infty$, so versteht man unter dem*

„wahren Werthe" $f(a)$ der Function $f(x)$ für das Argument $x = a$ die Grenze $f(a) = \lim\limits_{x=a} f(x)$, sofern eine solche existirt.

Das Unendlichwerden der „elementaren" Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist ein solches, dass die Functionen:

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)}$$

für $x = a$ zugleich verschwinden, übrigens aber in der Umgebung von $x = a$ stetig sind (vergl. S. 14, oben).

Sind in der Umgebung von $x = a$ auch die Ableitungen $\varphi_1'(x)$ und $\psi_1'(x)$ stetig, so liefert Nr. 1 für $\lim\limits_{x=a} f(x)$:

$$(2) \quad \lim_{x=a}\left(\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}\right) = \lim_{x=a}\left(\frac{\psi_1'(x)}{\varphi_1'(x)}\right) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2 \cdot \lim_{x=a}\left(\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right),$$

$$(3) \quad . \; . \; . \quad \lim_{x=a} f(x) = \left[\lim_{x=a} f(x)\right]^2 \cdot \lim_{x=a}\left(\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right).$$

Ist $\lim\limits_{x=a} f(x)$ von 0 verschieden und endlich, so folgt aus (3):

$$(4) \quad . \; . \; . \quad \lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right).$$

Ist $\lim\limits_{x=a} f(x) = 0$, so darf man Formel (4) auf die Function

$$(5) \quad . \; . \; . \quad g(x) = 1 + f(x) = \frac{\psi(x) + \varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$$

anwenden und findet auf diese Weise:

$$(6) \quad . \; . \quad 1 + \lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \frac{\chi'(x)}{\psi'(x)} = 1 + \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

so dass die Formel (4) bestehen bleibt.

Auch für $\lim\limits_{x=a} f(x) = \infty$ ist Formel (4) richtig, wie man durch Vermittelung der Function $g(x) = 1 : f(x)$, für welche Formel (4) bewiesen ist, zeigt.

Auf dieselbe Art, wie in Nr. 1, ergiebt sich nunmehr der

Lehrsatz: *Werden Zähler und Nenner, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, von $f(x)$ sammt ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen zugleich unendlich gross, falls $x = a$ wird, während $\varphi^{(n)}(a)$ und $\psi^{(n)}(a)$ wenigstens nicht beide ∞ sind, so gilt die Gleichung:*

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad f(a) = \lim_{x=a}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}. \text{ —}$$

Nähert sich x der Grenze $+\infty$, so nähert sich $y = x^{-1}$ als positive Grösse der Grenze 0.

Werden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $\lim. x = +\infty$ gleichzeitig ∞, so setze man:

$$(8) \qquad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \varphi_1(y), \ \psi(x) = \psi\left(\frac{1}{y}\right) = \psi_1(y)$$

und untersuche $\varphi_1(y) : \psi_1(y)$ für $y = 0$.

Die bisherige Entwickelung liefert daraufhin für $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)$:

$$(9) \quad . \ . \ \lim_{y=0}\left(\frac{\varphi_1(y)}{\psi_1(y)}\right) = \lim_{y=0}\left(\frac{\varphi_1'(y)}{\psi_1'(y)}\right) = \lim_{x=+\infty}\left(\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right),$$

wie man durch Division der beiden Gleichungen zeigt:

$$(10) \quad . \ . \ \varphi_1'(y) = -x^2\varphi'(x), \quad \psi_1'(y) = -x^2\psi'(x).$$

Der letzte Ausdruck (9) für $\lim\limits_{x=+\infty} f(x)$ ergiebt den

Lehrsatz: *Wachsen für lim. $x = \infty$ Zähler und Nenner von $f(x)$ gleichzeitig über alle Grenzen, so bleibt für die Bestimmung des „wahren Werthes“ $f(\infty) = \lim\limits_{x=+\infty} f(x)$ die für ein endliches a gewonnene Regel* (7) *erhalten.*

Beispiel I. Es soll der wahre Werth der Function $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ mit ganzzahligem positiven n für $x = \infty$ berechnet werden. Hier ist n Male im Zähler und Nenner zu differentiiren, wodurch man findet:

$$(11) \quad . \ . \ . \ . \ . \ \lim_{x=\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{e^x}{n!}\right) = \infty.$$

Man spricht das Ergebniss aus durch folgenden

Lehrsatz: *Das Unendlichwerden der Exponentialfunction e^x für $x = \infty$ ist stärker als dasjenige irgend einer Potenz x^n mit endlichem positiven Exponenten n.*

Beispiel II. Es soll der wahre Werth von $f(x) = \frac{\log x}{x^r}$ mit irgend einem ganzen oder gebrochenen $r > 0$ für $x = \infty$ berechnet werden. Einmalige Differentiation liefert:

$$(12) \qquad \lim_{x=\infty}\left(\frac{\log x}{x^r}\right) = \lim_{x=\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{r\,x^{r-1}}\right] = \lim_{x=\infty}\left(\frac{1}{r\,x^r}\right) = 0.$$

Lehrsatz: *Das Unendlichwerden des Logarithmus $\log x$ für $x = \infty$ ist schwächer als dasjenige einer Potenz x^r mit irgend einem von 0 verschiedenen positiven Exponenten r.*

Man vergleiche mit diesen Ergebnissen den Verlauf der Curven für Exponentialfunction und Logarithmus (Fig. 6, S. 5 und Fig. 7, S. 6).

3. Die unbestimmten Gestalten $0 \cdot \infty, \ \infty - \infty, \ 0^0, \ \infty^0, \ 1^\infty$.

Nimmt die Function $f(x)$ für $x = a$ eine der noch übrigen fünf unbestimmten Gestalten $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so definirt man den *„wahren Werth“* $f(a)$ der Function $f(x)$ für $x = a$ stets wieder durch $f(a) = \lim\limits_{x=a} f(x)$.

Die Berechnung von $f(a)$ gelingt in allen fünf Fällen durch Zurückführung auf eine der in Nr. 1 und 2 behandelten Gestalten.

I. Ist $f(x) = \varphi(x) \, . \, \psi(x)$, und wird der erste Factor für $lim. \; x = a$ gleich 0, der zweite $= \infty$, so setze man entweder

$$(1) \quad \ldots \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)} \quad \text{oder} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Hieraus entspringt für $f(x)$ entweder die Gestalt:

$$(2) \quad \ldots \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Für $x = a$ tritt dann entsprechend entweder $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ein.

Beispiel. Um den wahren Werth von $f(x) = x^r . \log x$ mit $r > 0$ für $x = 0$ zu bestimmen, wähle man die zweite Formel (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x=0} (x^r . \log x) = \lim\limits_{x=0} \left(\dfrac{\log x}{x^{-r}}\right) = \lim\limits_{x=0} \left[\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-r\, x^{-r-1}}\right] \\ \qquad = \lim\limits_{x=0} \left(\dfrac{x^r}{-r}\right) = 0. \end{cases}$$

Lehrsatz: *Das Unendlichwerden von $\log x$ für $x = 0$ ist so schwach, dass das Product von $\log x$ mit der Potenz x^r irgend eines von 0 verschiedenen positiven Exponenten r für $lim. \; x = 0$ die Grenze 0 hat.*

II. Ist $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, und werden Minuend und Subtrahend für $x = a$ gleichzeitig unendlich, so benutze man die in (1) erklärten Functionen $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ und schreibe daraufhin:

$$(4) \quad \ldots \; f(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} - \frac{1}{\psi_1(x)} = \frac{\psi_1(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)\;\psi_1(x)}.$$

In dieser Form erscheint $f(x)$ für $x = a$ in der Gestalt $\frac{0}{0}$.

III. Nimmt die Function $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$ für $x = a$ eine der Gestalten 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setze man

$$(5) \qquad \log \varphi(x) = \varphi_1(x), \quad \log f(x) = F(x), \quad f(x) = e^{F(x)}.$$

Die so definirte Function:

$$(6) \quad \ldots \quad F(x) = \log f(x) = \psi(x) \, . \, \varphi_1(x)$$

erscheint in allen drei Fällen für $x = a$ in der Gestalt $0 . \infty$, so dass man $F(a)$ und daraufhin $f(a) = e^{F(a)}$ nach der in I. angegebenen Regel finden kann.

Beispiel. Die Function $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ nimmt für $x = 0$ die Gestalt 1^∞ an. Hier ist:

$$(7) \qquad \lim\limits_{x=0} F(x) = \lim\limits_{x=0} \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) = \lim\limits_{x=0} \left(\frac{1}{1+x}\right) = 1;$$

und also ergiebt sich $f(0) = e^{F(0)} = e^1 = e$ in Uebereinstimmung mit (8), S. 13.